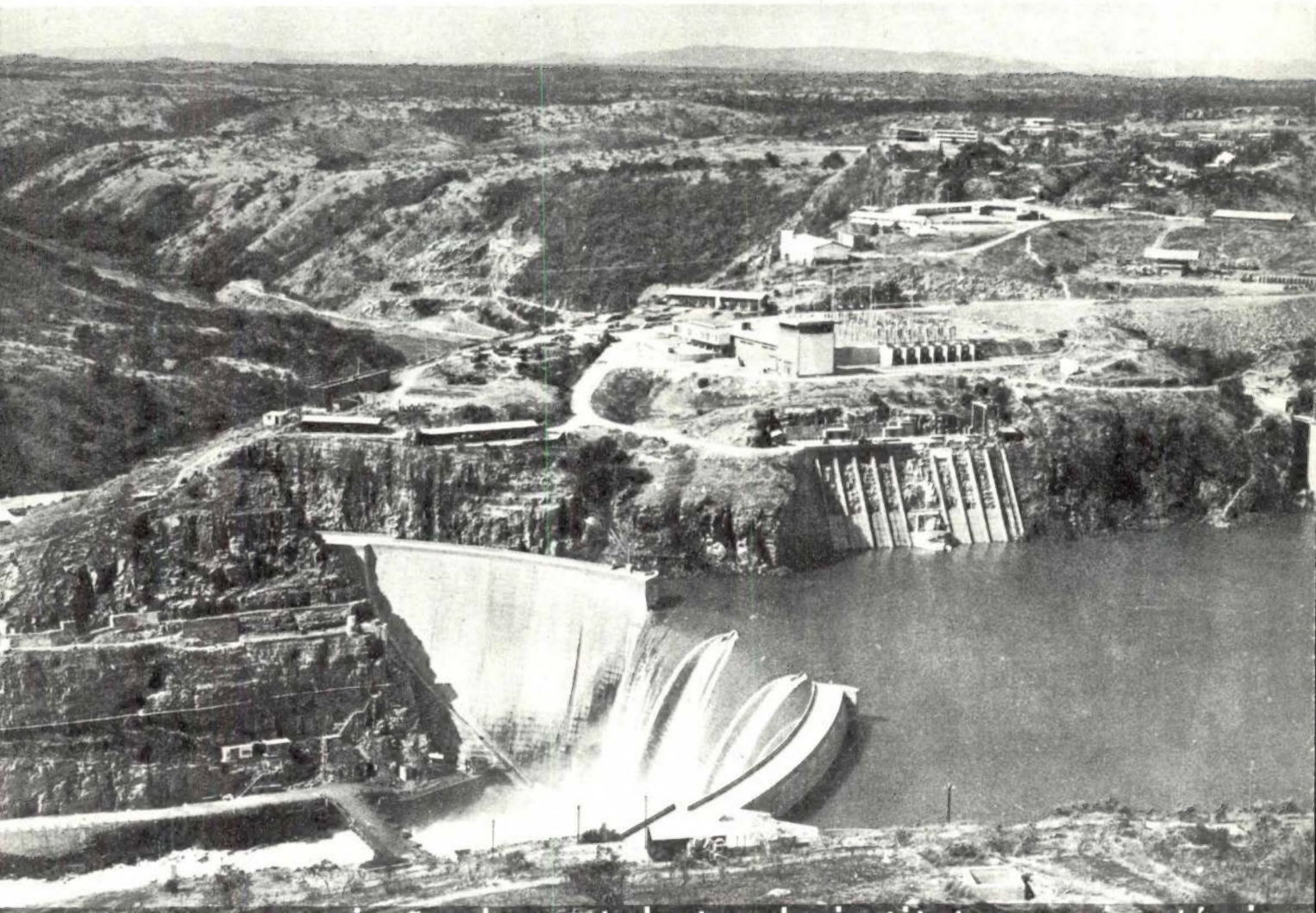
técnica



328

associação dos estudantes do instituto superior técnico

maio 1963

revista de engenharia

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

S. A. R. L.

SEDE

Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO

TELEFONES: 2 76 76 / 77 / 78 / 79 — Est. 90

DELEGAÇÃO

Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA

TEL.: 73 11 81/82/83/84/85/86 - 73 33 33 - 48 49 1

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO
E DA CACHOFARRA

●

A **UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA** distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

materiais novobra

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

PAVIMENTOS

COBERTURAS

VIGAS DE GRANDE VÃO

ASNAS

PERFIS

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS NOVOBRA, LDA.

AV. ESTADOS UNIDOS DA AMERICA, LOTE 3, 5.º D. TELEF. 774832/766446 LISBOA-5

TÉCNICA

Ano XXXVIII - N.º 328 Maio de 1963

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-1. * TELEF. 77 01 44 (Linha 50)

CORPO REDACTORIAL

J. M. VIEGAS GONÇALVES
A. ROMÃO DIAS
J. F. GOMES DE PINA
A. M. L. ESTEVES BRINCA

NUMERO AVULSO 15$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	37$50	60$00	110$00
Ultramar Português e Espanha	—	65$00	120$00
Estrangeiro	—	70$00	130$00

PUBLICAÇÃO PERIÓDICA MENSAL

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Vista geral do aproveitamento hidroeléctrico de Cambambe — Sonefe

Págs.

Problema de Extremos
Por A. Gouvêa Portela 519

Arranque síncrono de turbo-alternadores
Por Carlos Ferrer Moncada 539

Aplicação do método das analogias eléctricas ao estudo de alguns problemas relativos ao campo magnético das máquinas eléctricas
Por Carlos de Medeiros Portela 561

O equipamento hidromecânico de Cambambe
Por António Sarmento 593

Vigas parcialmente encastradas nos apoios
Por J. S. Brasão Farinha 613

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional** 616

Biblioteca 617

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

A

Pág.

Agência Comercial, Lda. IV
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . XXXVII
Agro-Mecânica XXXII
Asea Eléctrica Ld.ª XXIV
Austin XXXIII

C

CIDEX IV
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Cimianto XLIII
Companhia de Cimentos Brancos . . VIII
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos IX
Companhia Portuguesa de Trefilaria XXVI
Companhia União Fabril . . . XIV e XVI
Construções Técnicas, Ltd.ª XXXI
C. Santos, Ltd.ª . . . . . VI e XXXIX
Cummins XLIV

E

EFACEC XXIX
Electro-Arco, Ltd.ª XLIV
Electrotécnicos Reunidos XXXII
Emílio de Azevedo Campos & C.ª, Ltd.ª XXXII
Empresa de Cimentos de Leiria . . XLIV
Empresa Electro Cerâmica XLI
Empresa de Produtos Asfálticos. . . X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações XXIV
Empresa de fundações A. Cavaco . XXXVI

F

Fábrica Portugal II
Fanafel XVI
Fundações Franki, Lda. . . . . .

G

G. F. XXVIII

H

Harker Sumner & C.ª, Ltd. XLIII

I

Impermeábilis XXVI
Isolux, Lda. XLII
I. S. T. XXXVII

J

Pág.

Jayme da Costa, Lda XIX

M

Metalúrgica Duarte Ferreira XXXVI
Modern Office XLIII
Monterroso & C.ª, Lda. XL

N

Noco Sun Nash XXXIV
Novobra, Lda. . . . . 2.ª da capa

O

Orlando Fernandes XVI

P

Philips XVII
Pimentel & Casquilho, Ltd.ª III

Q

Quimicor, S.A.R.L. . . . . XXIII e XXIV

R

Rolf Keel — PAP XVIII

S

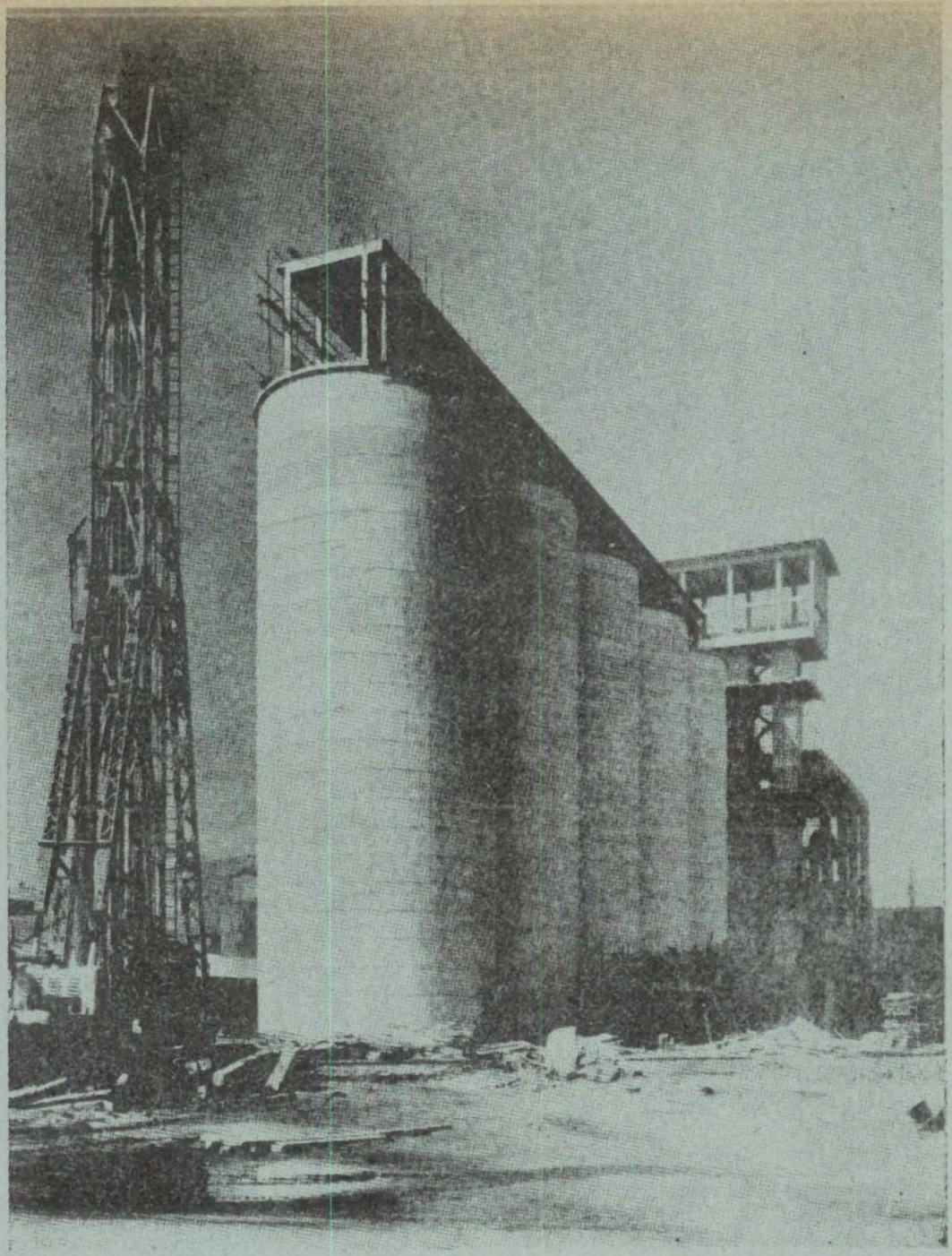
Sanfer, Lda. XL
S. E. Moniz da Maia & Vaz Guedes, L.da XIII
Siemens XXXV
Soabal, Ltd. XII
S. Com. de Isolamentos de Cortiça XXXVII
SMEIA XXV
Soc. Comercial Romar, Lda. . XX e XXX
Société Louis de Roll V
Sociedade Comercial Luso-Italiana XLII
Sociedade de Electricidade Brown Boveri . . . . . 4.ª da capa
Sociedade Portuguesa Cavan VIII
Sondagens e Fundações, A Cavaco . XXXIV
Sondagens Ródio, Ltd.ª XLIV
Standard Eléctrica VII
S. T. E. T. . . . . XXI e XXII

V

Vasco Pessoa, Lda. XXXIV

W

Wild Portugal, Lda. XXVII
W. Schmidt XLI



BATERIA DE CINCO SILOS com 11,50 m de diâmetro e 30,00 m de altura, cada

COMPANHIA CIMENTO TEJO
Alhandra

EXECUTADOS POR

Sociedade Construtora Portuguesa, Lda.

Assente sobre
313
ESTACAS FRANKI

FUNDAÇÕES FRANKI, L.DA

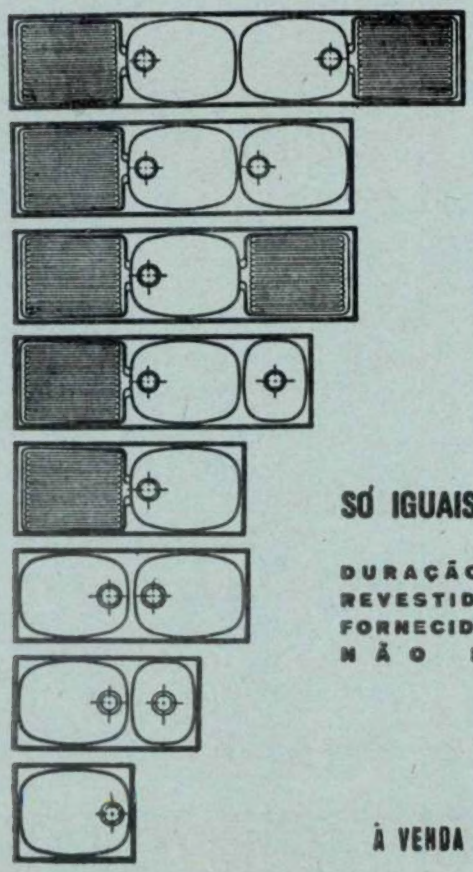
Rua Braamcamp, 13, 3.º — Lisboa — Tel. PPC 73 41 12 — End. Tel. FRANKI

USE NA SUA COZINHA UM ELEGANTE LAVA-LOUÇAS DE AÇO INOXIDÁVEL

CONCEBIDO PELA

FABRICA PORTUGAL

PARA MODERNIZAR OS LARES DE PORTUGAL



APRESENTADOS EM

8 MODELOS

"STANDARD"

EXECUTAM-SE FORA DE SÉRIE, MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES

SÓ IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

DURAÇÃO ILIMITADA • HIGIÉNICOS
REVESTIDOS DE ISOLAMENTO ESPECIAL
FORNECIDOS COM SIFÃO DE SEGURANÇA
NÃO PARTEM A LOUÇA

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

QUASE 40 ANOS AO SERVIÇO DA ENGENHARIA PORTUGUESA

GRANDE SORTIDO DE INSTRUMENTOS DE PRECISÃO, CIENTÍFICOS E INDUSTRIAIS

RUA JARDIM DO REGEDOR, 24, 2.º
LISBOA
TELEF.: 32 43 14 — 32 42 48 ✦ TELEG.: TECNA

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

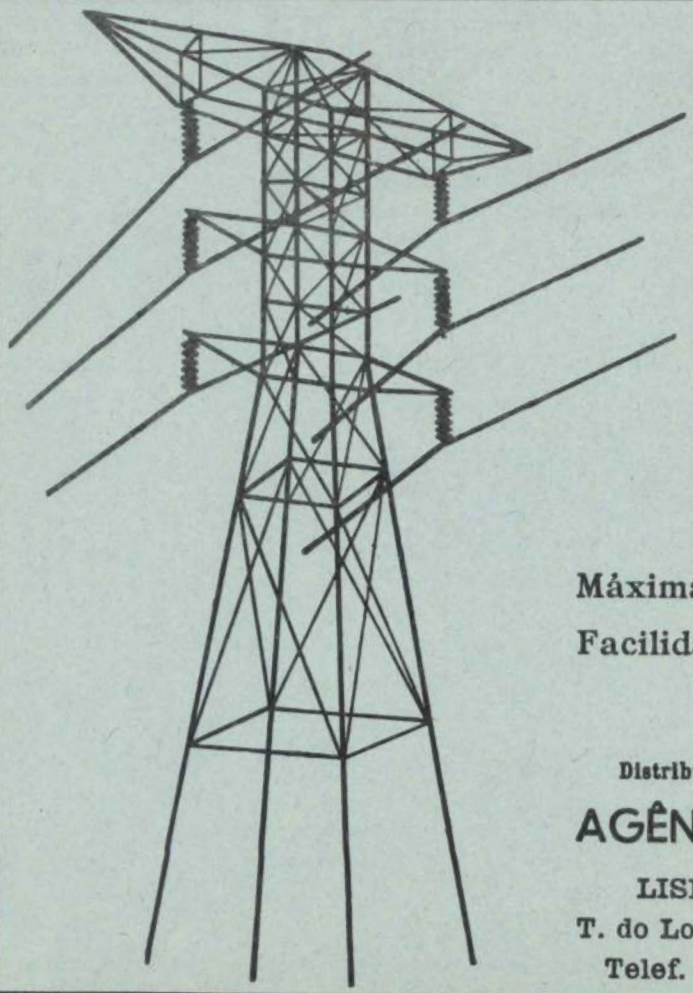
Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.°/Telef. 73 53 07/LISBOA 1



METALIZAÇÃO A FRIO

NEODON

NEODON + ZINCO =
NEODONZINKGRUND

Máxima protecção
Facilidade de aplicação

Distribuidores exclusivos:

AGÊNCIA COMERCIAL, L.DA

LISBOA
T. do Loureiro, 3
Telef. 4 90 54

ÉVORA
R. da República, 93
Telef. 2 33 63

Aumento da produção

pela

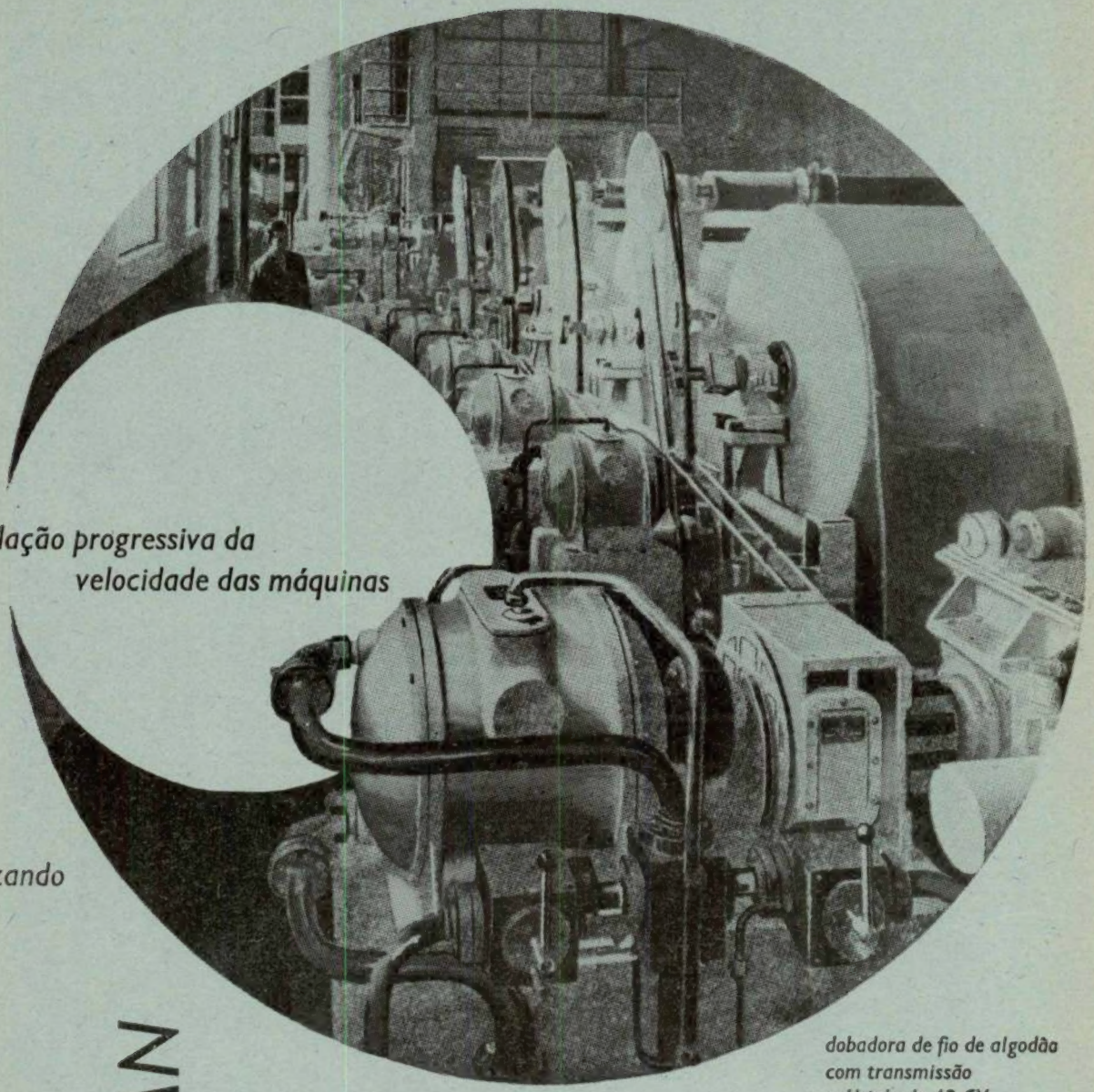
regulação progressiva da velocidade das máquinas

utilizando

uma

transmissão de acção múltipla

HYDRO-TITAN



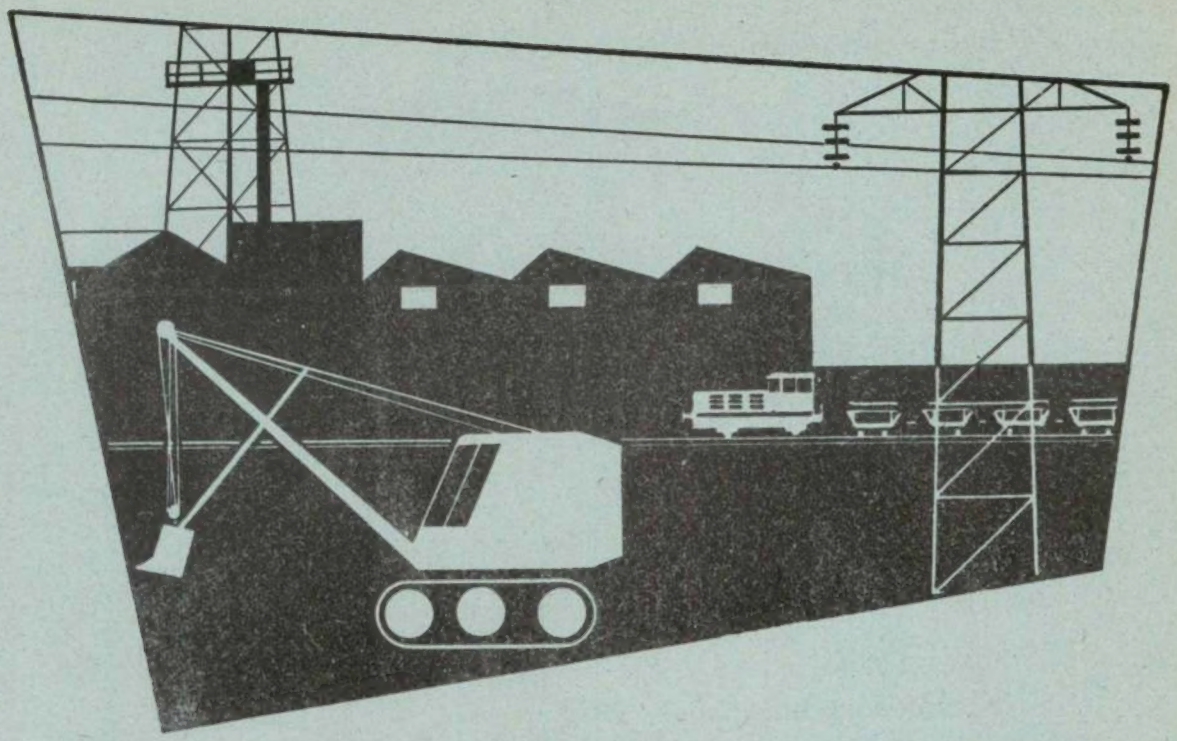
dobadora de fio de algodão com transmissão múltipla de 42 CV, numa fábrica de papel

Variação da potência de 5 a 3000 CV

DE ROLL

Klus, Suiça

Representantes em Portugal:
Socotel, L.da
Rua Sá da Bandeira, 651-4,º
Porto; Tel. 2 70 13



MERCEDES-BENZ

MOTORES INDUSTRIAIS DIESEL

MOTORES PARA TODAS AS APLICAÇÕES INDUSTRIAIS
FAMOSOS EM TODO O MUNDO PELA SUA GRANDE ROBUSTÊS, ECONOMIA
DE CONSUMO E FACILIDADE DE MANUTENÇÃO
MODELOS DESDE 15 A 2.500 H. P.

EM ARMAZÉM:

MODELO M B 841 B	25 H. P. — 1.000 R. P. M.
MODELO M 202 B	55 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 203 B	90 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 204 B	120 H. P. — 1.200 R. P. M.

OUTROS MODELOS PARA ENTREGA MUITO RÁPIDA

MOTORES A 4 TEMPOS · ARREFECIMENTO POR ÁGUA
ARRANQUE A AR COMPRIMIDO OU ELÉCTRICO

REPRESENTANTES C. SANTOS LDA. — DIVISÃO MARÍTIMA E INDUSTRIAL

29, AV. DA LIBERDADE, 41 — LISBOA
160, R. DE S.TA CATARINA, 168 — PORTO

Standard Electrica S.A.R.L.

Associada da

INTERNATIONAL TELEPHONE AND TELEGRAPH CORPORATION

DE NOVA YORK

TELECOMUNICAÇÕES

ELECTRÓNICA

AV. DA INDIA — LISBOA

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

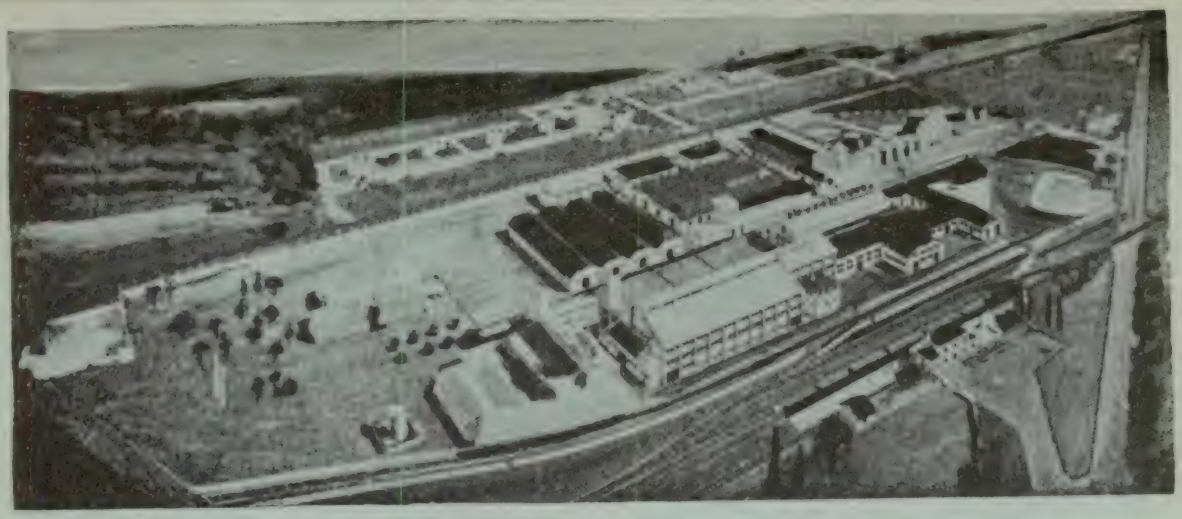
✱

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

✱

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A
TELEF. 47812-50129
LISBOA



COMPANHIA PORTUGUESA DE FORNOS ELÉCTRICOS

PRODUTORA DE

FERRO GUSA

FERRO LIGAS

FERRO-MANGANÊS

SÍLICO-MANGANÊS

FERRO-SILÍCIOS

15 % - 25 % - 45 % - 75 % - 90 %

CARBONETO DE CÁLCIO

CIANAMIDA CÁLCICA

PASTA PARA ELÉCTRODOS

E EM MONTAGEM

GRAFITE

FÁBRICAS
CANAS DE SENHORIM
Telefone 6 72 22

SEDE
Largo de S. Carlos, 4 2.º — LISBOA
Telefones 32 53 43 - 3 55 56 - 36 89 89

Celulite

ISOLAMENTO TÉRMICO DAS CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS
*
TECTOS
*
PAREDES
*
CÂMARAS FRIGORÍFICAS
*
ISOLAMENTOS INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. • RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.° • TEL. 73 01 56 — LISBOA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA

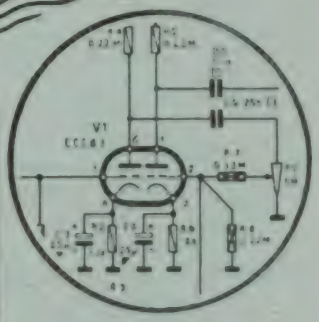
TELEF. 73 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

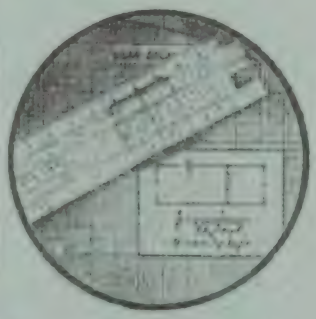
EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS
IMPERMEABILISADOR
IMEPA
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º-LISBOA

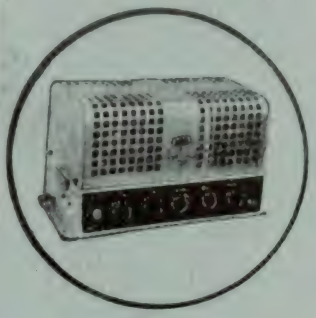
FÁBRICA EM SÁCAVÉM

EQUIPAMENTO DE AMPLIFICAÇÃO DE SOM

CONCEBIDO
BEM CALCULADO
CONSTRUIDO







LESA

A grande marca italiana

Representantes em Portugal

TELECTRA

EMPRESA TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S. A. R. L.

Rua Rodrigo da Fonseca, 103, r/c
LISBOA — Tel. 68 60 72

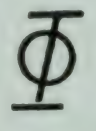
Rua Sá da Bandeira, 766-1.º E.
Tel. 2 48 18 — PORTO

AÇO TOR

O AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA
PARA BETÃO ARMADO COM
MAIOR VENDA NO MUNDO

TENSÃO DE SEGURANÇA 2 400 Kg/cm²
SEM GANCHOS

Especifique
AÇO TOR
com o símbolo



SOABAL – SOCIEDADE DE AÇOS PARA BETÃO ARMADO, LDA.
RUA JOAQUIM BONIFÁCIO, 2, 1.º — TELEF. 4 05 66 — LISBOA

TÉCNICA

CORPO REDATORIAL: J. M. VIEGAS GONÇALVES, A. ROMÃO DIAS, J. F. GOMES DE PINA, A. M. L. ESTEVES BRINCA

Ano XXXVIII — N.º 328 Maio de 1963

C. D. U. 517.514.2:536.7

PROBLEMA DE EXTREMOS

POR A. GOUVÊA PORTELA
PROFESSOR DO I. S. T.

Introdução

O problema de extremos apresenta por vezes certas dificuldades em casos não regulares. Em termodinâmica, testa-se a estabilidade dos sistemas, verificando se, no ponto em estudo, a energia interna ou a entropia têm um *extremo* nesse ponto.

As funções que definem a energia interna ou a entropia no espaço termodinâmico são contínuas e susceptíveis de desenvolvimento em série de Taylor, mas justamente nas regiões mais interessantes, na vizinhança de «transições» ordem-desordem ou deslocamento, a função deixa de ser regular.

Daí resultou esta análise que resolve um pouco melhor o problema de extremos do que o método clássico e não é muito difícil de aplicar pois consta na formação de alguns quadros e na resolução de algumas equações de grau, em geral, pouco elevado.

De facto a estabilidade em termodinâmica não tem sentido físico se se decide para além da 4.ª ordem.

Este será o primeiro artigo, que trata apenas o caso de uma função de duas variáveis independentes.

A generalização a espaços mais vastos far-se-á em artigos posteriores.

Usam-se frequentemente espaços de representação que resultam de transformadas, não lineares, sobre as variáveis (h, k), nomeadamente o espaço $\Omega(\alpha, k)$.

Estes artifícios de cálculo facilitam grandemente a exposição e depois, na aplicação, permitem uma rápida identificação das diversas hipóteses.

Em artigos a publicar posteriormente, apresentar-se-ão outros espaços de representação que apresentam certas aptidões ao tratamento gráfico.

Símbolos

— Letras do abecedário latino minúsculas, excepto h, k, m e n, com ou sem índices, representam a série $0, 1, 2, 3, \ldots \infty$.

— h e k representam os números reais satisfazendo às condições: $0 \leqslant |h|, |k| < 1$

— m e n (com ou sem índices) representam qualquer número real finito: $|m| < \infty$.

— Letras do abecedário latino maiúsculas, representam números arbitrários reais satisfazendo às condições: $0 < A, B, \ldots < \infty$.

— δ e ε (com ou sem índices) — representam um número positivo menor que a unidade que pode ser feito arbitràriamente pequeno, isto é, $0 < |\delta| < 1$ e δ arbitràriamente pequeno.

— S , σ Soma dos termos de uma série cujas formas são: $m_{i,j}\, h^i\, k^j$. Podem ser ou não indiciados.

Lema 1

Se forem dados:

— um monómio da forma: $m_{a,b}\, h^a\, k^b$

— uma série cujo termo geral é: $m_{a+i,b+j}\, h^{a+i}\, k^{b+j}$

— sendo $i + j \geqslant 1$

então será:

$$|m_{a,b}\, h^a \,.\, k^b| > \sum_{i,j=0}^{\infty} |m_{a+i,b+j}\, h^{a+i} \,.\, k^{b+j}| \tag{1}$$

$$\text{Se: } \begin{cases} a,b \neq 0 \\ h,k \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad |h|, |k| < |\delta_1|$$

Demonstração:

Como h, k $\neq$ 0, dividamos a desigualdade (1) por $|h^a\, k^b|$ e obteremos:

$$|m_{a,b}| > \sum_{i,j=0}^{\infty} |m_{a+i,b+j}\, h^i \,.\, k^j| \tag{2}$$

Designando por $|N|$ o maior dos $|m_{a+i,b+j}|$

será $$|N| > |m_{a+i,b+j}| \quad i,j = 0, \ldots \infty$$

e então

$$|N| \,.\, \sum_{i,j=0}^{\infty} |h|^i\, |k|^j \geqslant \sum_{i,j=0}^{\infty} |m_{a+i,b+j}| \,.\, |h|^i \,.\, |k|^j \tag{3}$$

mas:

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} |h|^i \,.\, |k|^j = \sum_{i,j=1}^{\infty} |h|^i \,.\, |k|^j + \sum_{j=1}^{\infty} |k|^j + \sum_{i=1}^{\infty} |h|^i$$

porque $i + j \geqslant 1$

Porém:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |h|^i \,.\, |k|^j = \sum_{i=1}^{\infty} |h|^i \,.\, \sum_{j=1}^{\infty} |k|^j$$

e

$$\sum_{i=0}^{\infty} |h|^i = \frac{1 - |h|^{\infty}}{1 - |h|} = \frac{1}{1 - |h|} \qquad (|h| < 1)$$

$$\sum_{=1}^{\infty} |h|^i = \frac{1}{1 - |h|} - 1 = \frac{|h|}{1 - |h|}$$

e identicamente para $|k|$.

Donde:

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} |h|^i \,.\, |k|^j = \frac{|h|}{1 - |h|} \,.\, \frac{|k|}{1 - |k|} + \frac{|k|}{1 - |k|} + \frac{|h|}{1 - |h|} =$$

$$= \frac{|k| \,.\, (1 - |h|) + |h|}{(1 - |h|) \,.\, (1 - |k|)}$$

Substituindo em (3) e (2) teremos:

$$|N| \sum_{i,j=0}^{\infty} |h|^i . |k|^j = |N| . \frac{|k| . (1-|h|) + |h|}{(1-|h|) . (1-|k|)} < |m_{a,b}| \tag{4}$$

e haverá sempre um δ suficientemente pequeno de modo que a desigualdade (4) seja satisfeita para quaisquer h e k que satisfaçam à condição $|h|, |k| < \delta_1$ e daí

$$|m_{a,b} h^a k^b| > \sum_{i,j=0}^{\infty} |m_{a+i,b+j} h^{a+i} k^{b+j}| \quad \text{para } |h|, |k| < \delta_1$$

Lema 2

Nas condições do lema 1, mas se $b = 0$ e $h \neq 0$ e $|h|, |k| < \delta_2$,

será
$$|m_{a,o} h^a| > \sum_{i,j=0}^{\infty} |m_{a+i,j} h^{a+i} k^j| \tag{5}$$

Basta repetir a demonstração indicada no lema 1.

Lema 3

Nas condições do lema 1, mas se $a = 0$ e $k \neq 0$ e $|h|, k| < \delta_3$,

será
$$|m_{o,b} k^b| > \sum_{i,j=0}^{\infty} |m_{i,b+j} h^i k^{b+j}| \tag{6}$$

Demonstra-se dum modo idêntico.

Lema 4

Nas condições dos lemas 1, 2, 3,

se for
$$\begin{cases} |m_{a,b} h^a . k^b| > \sum_{i,j=0}^{\infty} |m_{a+i,b+j} h^{a+i} . k^{b+j}| \\ \text{para } |h|, |k| < |\delta_4| \end{cases}$$

será também:

$$|m_{a,b} h^a . k^b| > |\sum_{i,j=0}^{\infty} m_{a+i,b+j} h^{a+i} k^{b+} | \tag{7}$$

e

$$|m_{a,b}| . |h|^a . |k|^b > |\sum_{i,j=0}^{\infty} m_{a+i,b+j}| . |h|^{a+i} . |k|^{b+j} \tag{8}$$

para $|h|, |k| < |\delta_4|$

Lema 5

As seguintes consequências triviais podem ainda deduzir-se:

se $\begin{cases} a = 0 \\ k = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} b = 0 \\ h = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a, b \neq 0 \\ h \text{ ou } k = 0 \end{cases}$

será

$$| m_{a,b} h^a . k^b | = \sum_{i,j=0}^{\infty} | m_{a+i,b+i} h^{a+i} . k^{b+i} | = 0 \tag{9}$$

Lema 6

Qualquer que seja $0 < | h |, | k | < \delta$, $m_{2a,2b} h^{2a} . k^{2b}$ tem o sinal de $m_{2a,2b}$.
Com efeito, $h^{2a} . k^{2b} = (h^2)^a . (k^2)^b > 0$.
Portanto o sinal de $m_{2a,2b}$ não é afectado.
Se h ou $k = 0$, obtém-se o resultado trivial $m_{2a,2b} h^{2a} k^{2b} = 0$.

Lema 7

Nas condições dos lemas anteriores se for $\begin{cases} h \text{ ou } k \neq 0 \\ \text{e} \\ a \text{ e } b \neq 0 \end{cases}$

será

$$| m_{a,o} h^a | + | m_{o,b} k^b | > \sum_{i,j=o}^{\infty} | m_{a+i,j} h^{a+i} k^j | + \sum_{i,j=o}^{\infty} | m_{i,b+j} h^i k^{b+j} | \tag{10}$$

para $| h |, | k | < \delta_5$

Com efeito,

Se $\begin{cases} h \neq 0 \\ k = 0 \end{cases}$ pode verificar-se a desiguldade pelo lema 2, para $| h |, | k | < \delta_2$

Se $\begin{cases} h = 0 \\ k \neq 0 \end{cases}$ o mesmo, pelo lema 3, para $| h |, | k | < \delta_3$

Se $\begin{cases} h \neq 0 \\ k \neq 0 \end{cases}$ então, bastará somar ordenadamente para demonstrar o lema 7, desde que $| h |, | k | < \delta_4$ sendo : $\delta_4 < \delta_3, \delta_2$

Teorema 1

Sejam dados :

— a série cujo termo geral é : $m_{r,s} . h^r . k^s$

— os monómios : $A h^{2c}$ e $B k^{2d}$,

sendo :

$$\begin{cases} r + s \geqslant 1 \\ a , b \neq 0 \\ h \text{ ou } k \neq 0 \end{cases}$$

A soma da série (S_T) é *positiva* quaisquer que sejam h, k, se existir um par A, B, tal que :

$$S_o = \sum_{r,s=o}^{2c,2d} m_{r,s} h^r k^s > A h^{2c} + B k^{2d} \tag{11}$$

para $| h |, | k | < (\delta_5, \delta_4)$
ou $| h |, | k | < \delta_6$ com $\delta_6 < (\delta_5, \delta_4)$

A série diz-se *positiva-definida*.

Demonstração

A soma da série é dada pela seguinte expressão:

$$S_T = \sum_{r,s=o}^{\infty} m_{r.s}\, h^r k^s \qquad r + s \geqslant 1$$

mas

$$\sum_{r,s=o}^{\infty} m_{r,s}\, h^r k^s = \sum_{r.s=o}^{2c,2d} m_{r,s}\, h^r k^s + \sum_{\substack{r=2c+1\\ s=o}}^{\infty} m_{r,s}\, h^r k^s + \sum_{\substack{r=o\\ s=2d+1}}^{\infty} m_{r,s}\, h^r k^s$$

Se admitirmos que existe o par A, B referido, será

$$\begin{cases} S_o = \sum_{r,s=o}^{2c,2d} m_{r\,s}\, h^r k^s > A\, h^{2c} + B\, k^{2d} \\ \text{para} \qquad \delta_5 > |h|, |k| \end{cases}$$

mas pelo lema 7 será, para $|h|, |k| < \delta_4$

$$A\, h^{2c} + B\, k^{2d} > \sum_{\substack{r=2c+1\\ s=o}}^{\infty} |m_{r,s}\, h^r k^s| + \sum_{\substack{r=o\\ s=2d+1}}^{\infty} |m_{r,s}\, h^r k^s| >$$

$$> \left| \sum_{\substack{r=2c+1\\ s=o}}^{\infty} m_{s,r}\, h^r k^s + \sum_{\substack{r=o\\ s=2d+1}}^{\infty} m_{r,s}\, h^r . k^s \right|$$

mas $A\, h^{2a} + B\, k^{2b} > 0$ porque h, k, não podem ser simultâneamente nulos por hipótese.

Donde $S_o > 0$ e $S_T > 0$

para $|h|, |k| < (\delta_5, \delta_4)$ q. e. d.

ou $|h|, |k| < \delta_6$ com $\delta_6 < \delta_5, \delta_4$.

Teorema I a)

Nas condições do teorema I, se existir um par de números *negativos* $-A, -B$ tal que

$$S_o = \sum_{r,s=o}^{2c,2d} m_{r,s}\, h^r k^s < (-A)\, h^{2c} + (-B)\, k^{2d} \tag{12}$$

para $|h|, |k| < \delta_6$ e $\delta_6 < \delta_5, \delta_4$

então S_T é *negativa* e a série diz-se *negativa-definida.*

Demonstra-se como o teorema I.

Lema 8

Se forem dados

— os monómios: $m_{r,s}\, h^r k^s$ e $m_{i,j}\, h^i k^j$

— a desigualdade: $|m_{r,s}\, h^r k^s| > |m_{i,j}\, h^i k^j|$ (13)

Para que a desigualdade (13) se verifique será suficiente que:

$$(r-i)\,\alpha < j-s \quad \text{e} \quad |h|, |k| < \delta < 1$$

sendo:

$$\alpha \rightarrow |h = |k|^{\alpha}$$
$$h, k \neq 0$$
$$|h|, |k| < 1$$
$$i, j, r, s \rightarrow 0, 1, 2, \ldots$$
$$0 < \alpha < \infty$$

Demonstração:

Façamos a transformada seguinte $|h| = |k|^{\alpha}$ (14)
O espaço $\varepsilon(h, k)$ é substituído pelo espaço $\Omega(\alpha, k)$.
O domínio de variação de h e k é $0 < |h|, |k| < 1$
O domínio de variação de α é $0 < \alpha < \infty$.

Aplicando a transformada (14) a (13) obtém-se:

$$|m_{r,s}| . |k|^{r, \alpha + s} > |m_{i,j}| . |k|^{i\alpha +}$$

ou $$|k|^{(r\alpha + s) - (i\alpha + j)} > \left| \frac{m_{i,j}}{m_{r,s}} \right| \tag{15}$$

e para $|k| < \delta$ esta desigualdade é satisfeita se

$$(r\alpha + s) - (i\alpha + j) < 0$$

ou $$(r - i)\alpha < (j - s) \tag{16}$$

Lema 9

Se, nas condições do lema 8, for:

$$\begin{cases} h = 0 \\ e \\ \begin{cases} i = 0 \\ j \neq 0 \end{cases} \end{cases} \tag{17}$$

ou

$$\begin{cases} k = 0 \\ e \\ \begin{cases} j = 0 \\ i \neq 0 \end{cases} \end{cases} \tag{18}$$

ou

Para que a desigualdade (13) se verifique é suficiente que, respectivamente:

$$\begin{cases} r = 0 \\ s < j \end{cases} \tag{19}$$

ou $$\begin{cases} s = 0 \\ r < i \end{cases} \tag{20}$$

Demonstração:

Se $i = 0$ (e $j \neq 0$) a desigualdade (13) escreve-se

$$|m_{r,s} h^r k^s| > |m_{0,j} k^j| \tag{21}$$

Desigualdade que é satisfeita, para $h = 0$, se $\begin{cases} r = 0 \\ s < j \end{cases}$.

Dum modo idêntico se demonstraria que para $\begin{cases} k = 0 \\ j = 0 \ (i \neq 0) \end{cases}$ será (13) satisfeito se $\begin{cases} s = 0 \\ r < i \end{cases}$

Lema 10

Sejam dados :

— um termo da forma $m_{r,s}\, h^r\, k^s \quad (r, s) \geqslant 1$

— uma série de G termos $m_{i,j}\, h^i\, k^j \quad (i, j) \geqslant 1$

— os termos $m_{a,o}\, h^a$ e $m_{o,b}\, k^b$

Para que :

$$| m_{r,s}\, h^r\, k^s | > \sum_{1}^{G} | m_{i,j}\, h^i\, k^j | + | m_{a,o}\, h^a | + | m_{o,b}\, k^b | \tag{22}$$

será suficiente que existam $\alpha\alpha$ $(\alpha > 0)$, tais que satisfaçam o sistema de desigualdades seguinte :

$$\left.\begin{cases} (r - i)\ \alpha < j - s \\ (r - a)\ \alpha < -s \\ \quad r\ \alpha < b - s \\ \text{e} \quad | k | < \delta_o \end{cases}\right\} \text{para todos os termos } (i, j) \text{ em número de G finito.} \tag{23}$$

Demonstração :

Para que $| m_{r,s}\, h^r\, k^s | > | m_{i,j}\, h^i\, k^j | \ (h, k \neq 0)$ é suficiente que $(r - i)\ \alpha < j - s$ e $| k | < \delta$ (Veja-se lema 8).

Donde

$$\begin{cases} | \gamma_l | \ . \ | m_{r,s}\, h^r\, k^s | > | m_{i,j}\, h^i\, k^j | \quad (h, k \neq 0) \quad \text{se} \\ \qquad (r - i)\ \alpha < j - s \quad \text{e} \quad | k | < \delta'_l < \delta_l \end{cases} \qquad \text{Sendo} \begin{cases} | \gamma_l | \ll 1 \\ \qquad \gg 0 \end{cases} \tag{24}$$

Idênticamente será

$$\begin{cases} | \gamma_a | \ . \ | m_{r,s}\, h^r\, k^s | > | m_{a,o}\, h^a | \quad (h, k \neq 0) \quad \text{é suficiente que} \\ \qquad (r - a)\ .\ \alpha < -s \quad \text{e} \quad | k | < \delta'_a < \delta_a \end{cases} \qquad \text{e} \begin{cases} | \gamma_a | \ll 1 \\ \qquad \gg 0 \end{cases} \tag{25}$$

e

$$\begin{cases} | \gamma_b | \ . \ | m_{r,s}\, h^r\, k^s | > | m_{o,b}\, k^b | \quad (h, k \neq 0) \quad \text{é suficiente que} \\ \qquad r\ \alpha < b - s \quad \text{e} \quad | k | < \delta'_b < \delta_b \end{cases} \qquad \text{e} \begin{cases} | \gamma_b | \ll 1 \\ \qquad \gg 0 \end{cases} \tag{26}$$

Se fizermos $\sum_{l=1}^{G} \gamma_l + \gamma_a + \gamma_b = 1$

e $\delta_o < \delta'_b, \delta'_a, \delta'_l, \ldots$

e somando (24), (25) e (26) teremos :

$$\left(\sum_{l=1}^{G} \gamma_l + \gamma_a + \gamma_b \right) . \ | m_{r,s}\, h^r\, k^s | > \sum_{l=1}^{G} | m_{i,j}\, h^i\, k^j | + | m_{a,o}\, h^a | + | m_{o,b}\, k^b |$$

$$\text{se} \quad \begin{cases} h, k \neq 0 \\ | k | < \delta_o \end{cases}$$

e se existir α que satisfaça ao sistema (23).

Corolário :

Todas as desigualdades do sistema (23) se podem escrever sob uma de duas formas :

$$\begin{cases} \alpha < M_l \\ \alpha > N_l \end{cases} \tag{27}$$

sendo M_l e N_l relações de números inteiros e finitos.

Se designarmos por $\begin{cases} M_0 \leqslant M_l & \text{(o menor dos } M_l) \\ N_0 \geqslant N_l & \text{(o maiordos } N_l) \end{cases}$

Se se verificar $\begin{cases} M_0 > 0 \\ M_0 > N_0 \end{cases}$

Então existirá uma região $(\alpha > 0)$ onde α satisfaz à condição de :

$$M_0 > \alpha > N_0 \tag{28}$$

e portanto é satisfeito o sistema (23).

Note-se que sendo M e N relações de números inteiros finitos se $M > N$, haverá uma infinidade de valores de α que satisfazem a $M_0 > \alpha > N_0$.

Lema 11 :

Sejam dados termos da forma $m_{r_i,s_i}\, h^{r_i}\, k^{s_i}$

Satisfazendo os índices à condição de:

$$(r_i - r_j)\, \alpha_0 = (s_j - s_i) \qquad \text{para todos os termos i, j } i \neq j \tag{29}$$

$$\alpha_0 > 0$$

a) o somatório

$$\sum_{i=1}^{n} m_{r_i,s_i}\, h^{r_i}\, k^{s_i} \tag{30}$$

será (positivo ou negativo) *definidos* se as raízes da equação

$$\sum_{i=1}^{n} m_{r_i,s_i}\, p^{r_i} = 0 \tag{31}$$

forem todas complexas.

b) o somatório será semidefinido (positivo ou negativo) se uma só raíz for real

c) o somatório será indefinido se duas ou mais raízes forem reais.

Demonstração :

Façamos a transformada $h = p\,|k|^{\alpha_0}$ sendo $(h, k \neq 0)$

e

$$\sum_{i=1}^{n} m_{r_i,s_i}\, h^{r_i}\, k^{s_i} = \sum_{i=1}^{n} m_{r_i,s_i}\, p^{r_i} \,.\, |k|^{(r_i \alpha_0 + s_i)} = |k|^{(r_i \alpha_0 + s_i)} \,.\, \sum_{i=1}^{n} m_{r_i,s_i}\, p_{r_i}$$

porque de (29), será : $r_i\, \alpha_0 + s_i = r_j\, \alpha_0 + s_j$ para todos os ii e jj, mas $|k|\, r_i \alpha_0 + s_i > 0$, donde o somatório (30) terá o sinal do somatório $\sum_{i=1}^{n} m_{r_i,s_i}\, p^{r_i}$.

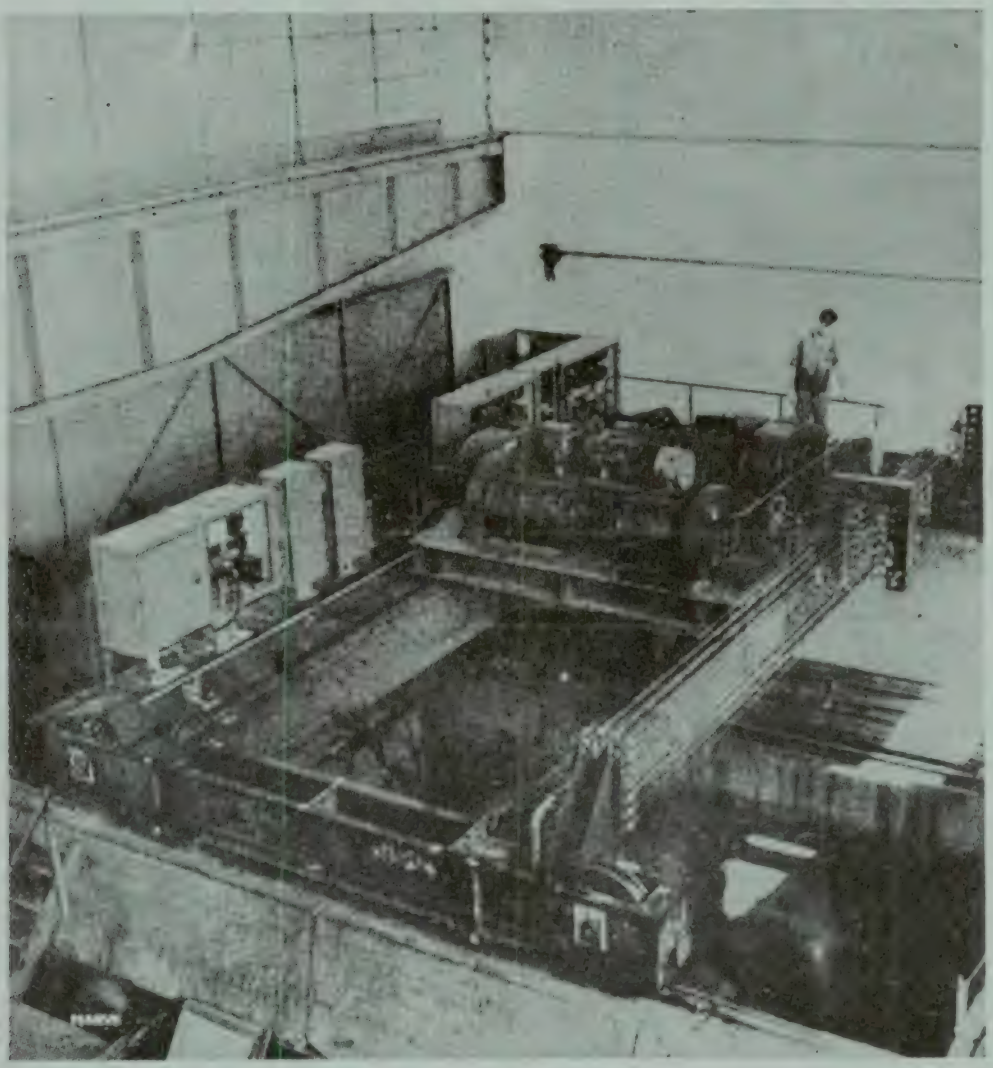
— Se forem todas imaginárias as raízes da equação (31) o referido somatório ou é sempre positivo ou sempre negativo (o que demonstra o lema 11 *a*).

MAGUE

CONSTRUÇÕES METALO-MECÂNICAS MAGUE, L.DA

(S. E. MONIZ DA MAIA & VAZ GUEDES, L.DA)

Alverca — Portugal

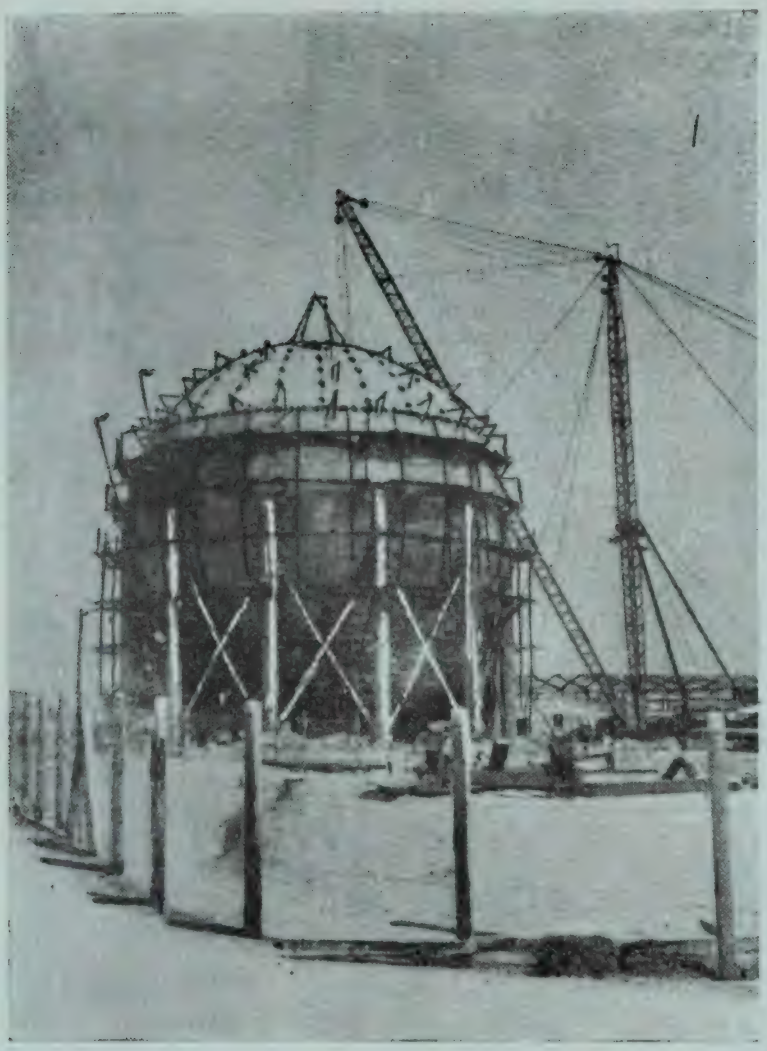


Ensaio de carga, em fábrica, de uma ponte rolante, eléctrica, de 40 t-10 t/9,6 m, destinada à Central Hidroeléctrica do Cañaveral — Honduras — América Central

•

PROJECTO E FABRICO DE

PONTES ROLANTES
GUINDASTES
GRUAS. DERRICKS E GUINCHOS
APARELHOS DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS
CONSTRUÇÕES METÁLICAS PESADAS



ESFERA

PARA

ARMAZENAGEM

DE

AMONÍACO

AÇOS VAZADOS • FERROS FUNDIDOS
MECÂNICA MÉDIA E PESADA
CONSTRUÇÕES METÁLICAS

comportas
turbinas
condutas forçadas
reservatórios sob pressão
permutadores de calor

REDUTORES DE VELOCIDADE

DIVISÃO METALO-MECÂNICA

COMPANHIA UNIÃO FABRIL

AV. 24 DE JULHO, 170 — LISBOA 2 — TELEFONES 67 04 21 E 67 20 61 — TELEGRAMAS: METALOFABRIL

— Se as raízes forem todas imaginárias menos uma real (multipla ou simples) então $\Sigma m_{r_i,s_i} p^{r_i} \geqslant 0$ ou $\leqslant 0$ e o somatório (31) é semidefinido.

— Se as raízes forem *duas* ou mais reais, então $\Sigma m_{r_i,s_i} p^{r_i} \lesseqgtr 0$ e o somatório (30) é *indefinido.*

Corolário :

Se em $\Sigma m_{r_i,s_i} h^{r_i} k^{s_i}$ existirem os termos $m_{a,o} h^a$ e $m_{o,b} k^b$, com a e b pares e $m_{a,o}, m_{o,b} > 0$, não existir mais nenhum termo com r ou s nulos, e se as raízes de equação (31) forem todas imaginárias, então o somatório (30) é positivo definido.

Com efeito, pelo lema 9), mesmo para $\begin{cases} h = 0 \\ k \neq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} k = 0 \\ h \neq 0 \end{cases}$ a série é positiva porque todos os termos se anulam com excepção respectivamente de $m_{o,b} k^b$ e $m_{a,o} k^a$, e porque a e b são pares e $m_{o,b} > 0$ e $m_{a,o} > 0$, a soma é positiva definida portanto.

Teorema II

Sejam dados :

— A série finita (r,s) cujo termo geral é $m_{r,s} h^r k^s$

— A desigualdade $S_1 = \sum_{r,s=0}^{2a,\,2b} m_{r,s} h^r k^s > A_1 h^{2a} + B_1 k^{2b} > 0$ (32)

— Os monómios $m_{2a,0} h^{2a}$ e $m_{0,2b} k^{2b}$, que são os de menor ordem com esta forma, sendo $m_{2a,0}, m_{0,2b} > 0$

— A equação $\sum_{i=1}^{n} m_{r_i,s_i} h^{r_i} = 0$

sendo $\begin{cases} r + s \geqslant 1 \\ r \leqslant 2a \\ s \leqslant 2b \end{cases}$ $\begin{cases} a, b \geqslant 1 \\ A_1 > 0 \\ B_1 > 0 \end{cases}$ $|h|, |k| < \delta$ $|h| + |k| > 0$

Então para que a desigualdade (32) seja satisfeita é *necessário,* mas não suficiente, que não existam *termos* com r e ou s impares, ou r e s pares mas $m_{r,s} < 0$, que estejam nas condições abaixo indicadas

1) $m_{0,s} = 0$ e $s < 2b$
2) $m_{r,0} = 0$ e $r < 2a$
3) $m_{r,s} = 0$ e $r,s \neq 0$ e $M_o > \alpha > N_o$ e $M_o > 0$ $M_o > N$ $|k| < \delta_1$
4) $m_{r,s} = 0$ $r, s \neq 0$ e $M_o = \alpha = N_o$ e $M_o > 0$ $|k| < \delta_2$
$\sum_{i=1}^{n} m_{r_i s_i} p^{r_i} = 0$ tiver quando muito uma raíz real.

1) $m_{o,s} = 0$ e $s < 2b$

Aplicando directamente o lema 9, conclui-se que esses termos são, em valor absoluto maiores que $m_{o,2b}$ e, sendo negativos e pares ou ímpares, podem ser maiores que $m_{o,2b}$ que é o único termo *par não nulo* para $h = 0$.

Então S_1 não seria positivo para $h = 0$.

2) $m_{r,o} = 0$ e $r < 2a$

Pela mesma razão.

3) $m \quad = 0 \quad r,s \neq 0$ e $M_o > \alpha > N_o$ $|k| < \delta_1$

Da aplicação do lema 10, se existe uma região tal que $M_o > \alpha > N_o$, então a desigualdade (32) é satisfeita.

Ora, se designarmos por $m_{i,j}\, h^i k^j$ qualquer termo par e positivo ($m_{i,j} > 0$), o 2.° membro representará a soma de todos os termos pares e positivos indicados na série S_1 (desde que identifiquemos $m_{a,o} \equiv m_{2a,o}$ e $m_{o,b} \equiv m_{o,2b}$).

Então na região $|k| < \delta_1$ e $M_o > \alpha > N_o$, esse termo negativo (ou que pode ser feito negativo) seria superior à soma de todos os termos pares de série e daí $S_1 < 0$.

4) $m_{r,s} = 0 \quad r, s \neq 0 \quad$ e $\quad M_o = \alpha = N_o \quad |k| < \delta_2$

Aplicando o lema 11, se duas ou mais raízes forem reais na equação $\sum_{i=1}^{n} m_{r_i, s_i}\, p^{r_i} = 0$, o somatório $\sum_{i=1}^{n} m_{r_i, s_i}\, p^{r_i} \gtrless 0$ e S_1, sendo $M_o = \alpha = N_o$, será positiva ou negativa.

Teorema III

Sejam dados os mesmos dados indicados para o teorema II e tenham sido satisfeitas as condições necessárias referidas no teorema II.

Então, é *suficiente*, mas não necessário, para satisfazer (32) que todas as raízes da equação $\sum_{i=1}^{n} m_{r_i, s_i}\, p^{r_i} = 0$ sejam imaginárias (complexas), e então será:

$$S_1 > A_1\, h^{2a} + B_1\, k^{2b}$$

Demonstração

Decomponhamos S_1 da seguinte forma:

$$S_1 = \sum_{l=1}^{G} m_{r,s}\, h^r k^s + \sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j}\, h^{2i} k^{2j} + m_{2a,o}\, h^{2a} + m_{o,2b}\, k^{2b} \tag{33}$$

$\sum_{l=1}^{G} m_{r,s}\, h^r k^s$ representará a soma de todos os termos pares negativos ou ímpares.

$\sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j}\, h^{2i} k^{2j}$ representará a soma de todos os termos pares e positivos, sendo $i, j \geqslant 1$.

Recorda-se que $\begin{cases} r \leqslant 2a \\ s \leqslant 2b \end{cases} \qquad \begin{cases} i \leqslant a \\ j \leqslant b \end{cases}$

se tiverem sido verificadas as condições necessárias referidas no teorema II.

Todos os $m_{r,s}\, h^r k^s$ restantes encontram-se numa das duas seguintes situações:

ou $\begin{cases} M_o < 0 \\ \text{ou} \\ N > M_o \end{cases}$ e $\quad |m_{r,s}\, h^r k^s| < \sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j}\, h^{2i} k^{2j} + m_{2a,o}\, h^{2a} + m_{o,2b}\, k^{2b}$ (34)

e para qualquer h e k satisfazendo a $|h|, |k| < \delta$ e $|h| + |k| > 0$

ou $\{ M_o = \alpha = N_o$ e $m_{r,s}\, h^r k^s$ está contido num somatório da forma

$$\sum_{i=1}^{m} m_{r_i, s_i}\, h^{r_i}\, k^{s_i} \tag{35}$$

e então forma-se a equação $\sum_{i=1} m_{r_i, s_i}\, p^{r_i} = 0$ e as raízes desta equação não são mais que uma real (teorema II).

Se impusermos que todas as raízes são imaginárias será, pelo lema 11, $\sum_{i=1}^{n} m_{r_i,s_i} h^{r_i} k^{s_i} > 0$ ou

$$\sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j} h^{2i} k^{2i} > \left| \sum_{l=1}^{G} m_{r,s} h^r k^s \right| \tag{36}$$

sendo os somatórios da desigualdade (36), respectivamente:

— a soma dos termos pares e positivos contidos em (35),
— a soma dos restantes termos de (35), ou seja, os termos pares negativos ou ímpares.

Prosseguindo a demonstração:

Se para todos os $m_{r,s} h^r k^s$ (pares negativos ou impares) se verifica a desigualdade:

$$| m_{r,s} h^r k^s | < \sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j} h^{2i} k^{2j} + m_{2a,0} h^{2a} + m_{0,2b} k^{2b} = F(h, k) \tag{37}$$

$$\text{para} \begin{cases} |h|, \ |k| < \delta_l < 1 \\ \text{e arbitrários} \end{cases}$$

Então se for $0 << \gamma_l << 1$, será ainda:

$$| m_{r,s} h^r k^s | < | \gamma_l | F(h,k) > 0 \tag{38}$$

$$\text{para} \begin{cases} |h|, \ |k| < \delta'_l < \delta_l \\ \text{e arbitrários} \end{cases}$$

ou ainda:

$$\sum_{l=1}^{G} | m_{r,s} h^r k^s | < F(h,k) \cdot \sum_{l=1}^{G} | \gamma_l | \tag{39}$$

e fazendo $\sum_{l=1}^{G} | \gamma_l | = 1$ e $\begin{cases} |h|, \ |k| < \delta'_o \\ \delta'_o < \delta'_l \ (l = 1, \ldots G) \end{cases}$

será finalmente:

$$\sum_{l=1}^{G} | m_{r,s} h^r k^s | < \sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j} h^{2i} k^{2j} + m_{2a,o} h^{2a} + m_{o,2b} k^{2b} \tag{40}$$

Donde $S_1 \geqslant -\sum_{l=1}^{G} | m_{r,s} h^r k^s | + \sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j} h^{2i} k^{2j} + m_{2a,0} h^{2a} + m_{0,2b} k^{2b}$

mas, tendo em vista (40), será ainda

$$S_1 \geqslant - \sum_{l=1}^{G} | m_{r,s} h^r k^s | + \sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j} h^{2i} k^{2j} + m_{2a,o} h^{2a} + m_{o,2b} k^{2b} > 0$$

$$\text{para} \begin{cases} |h|, \ |k| < \delta'_o \\ \delta'_o < \delta'_l \quad (l = 1, \ldots G) \end{cases}$$

Escolhamos um par de números *positivos* satisfazendo a $\begin{cases} 0 < A_1 < m_{2a,o} \\ 0 < B_1 < m_{o,2b} \end{cases}$

e ainda a:

$$- \sum_{l=1}^{G} | m_{r,s} h^r k^s | + \sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j} h^{2i} k^{2j} + m_{2a,o} h^{2a} + m_{o,2b} k^{2b} - A_1 h^{2a} - B_1 k^{2b} \geqslant 0$$

$$\text{para} \quad |h|, \ |k| < \delta'_o \quad \text{e } \delta'_o < \delta'_l \quad (l = 1, \ldots G)$$

ou

$$S_1 \geqslant - \sum_{l=1}^{G} | m_{r,s} h^r k^s | + \sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j} h^{2i} k^{2j} + m_{2a,o} h^{2a} + m_{o,2b} k^{2b} \geqslant A_1 h^{2a} + B_1 k^{2b}$$

donde $$S_I > A_I\, h^{2a} + B_I\, k^{2b}$$

Teorema IV:

Se a série limitada referida no teorema II, satisfizer às condições necessárias do teorema II e suficientes do teorema III, então a série ilimitada

$$S_T = \sum_{i,j=o}^{\infty} m_{i,j}\, h^i\, k^j > 0$$

Demonstração:

Pelo teorema I, provou-se que:

$$\sum_{r,s=0}^{2a,2b} m_{r,s}\, h^r\, k^s > A\, h^{2a} + B\, k^{2b} \qquad |h|, |k| < \delta$$

Então $S_T > 0$

Os teoremas II e III garantem que se forem satisfeitos, será $\sum_{r,s=o}^{2a,2b} m_{r,s}\, h^r\, k^s > A_I\, h^{2a} + B_I\, k^{2b}$ para $|h|, |k| < \delta''_o$ o que conclui a demonstração.

Teorema V

Se a série limitada referida nos teoremas II e III satisfizer às condições necessárias do teorema II mas não satisfizer às condições suficientes do teorema III, então a soma dessa série limitada satisfaz à desigualdade $S_I \geqslant 0$.

O sinal igual corresponderá a $h = p_o\, |k|^{\alpha_o}$.

Demonstração:

(Veja-se demonstração do teorema IV).

As condições impostas no teorema V correspondem a:

$$M_o = \alpha_o = N_o \qquad 0 < M_o < M_l \quad e \quad N_o > N_l \qquad l = (1, \ldots)$$

$\sum_i m_{r_i s_i}\, h^{r_i}\, k^{s_i} = 0$ só tem uma raíz real (p_o) e as restantes são complexas

Ora nessas condições, será:

$$\sum_{i,j}^{2a,2b} m_{2i,2j}\, h^{2i}\, k^{2j} \geqslant \left| \sum_i m_{r,s}\, h^r k^s \right| \qquad \text{(veja-se 36)}$$

Donde, escolhendo h e k convenientemente, será:

$$S_I \geqslant \sum_{l=1}^{G} m_{r,s}\, h^r\, k^s + \sum_{q=1}^{Q} m_{2i,2j}\, h^{2i}\, k^{2j} + m_{2a,o}\, h^{2a} + m_{o,2b}\, k^{2b} \geqslant 0$$

$$\text{para} \qquad \begin{array}{l} |h|, |k| < \delta'_o \\ \delta'_o < \delta'_l \qquad l = 1, \ldots G \end{array}$$

O valor de zero corresponderá a $h = p_o\, |k|^{\alpha_o}$.

Teorema VI

Sejam dados:

— a série (S_1) cujo termo geral é $m_{r,s}\, h^r\, k^s$ $\begin{cases} r \leqslant 2\,a \\ s \leqslant 2\,b \end{cases}$

— a série (S_2) » » » » » $\begin{cases} r \leqslant 2\,a \\ 2\,d \geqslant s > 2\,b \end{cases}$

— a série (S_3) » » » » » $\begin{cases} 2\,c \geqslant r > 2\,a \\ s \leqslant 2\,b \end{cases}$

sendo $m_{o,2d}\,,\, m_{2c,o} > 0$ e $\begin{cases} c > a \\ d > b \end{cases}$

Se

$S_2 > 0$ para $h = p_o\, |k|^{\alpha_o}$ então $S_T > 0$

$S_2 < 0$ » » » $S_T \gtrless 0$

$S_2 = 0$ » » » $S_T \geqslant 0$

e identicamente para (S_3).

Demonstração:

Façamos a demonstração para (S_2).

1) *Se* $S_2 > 0$ para $h = p_o\, |k|^{\alpha_o}$ e $|k| < \delta$

será $S_{1,2} = S_1 + S_2 > 0$ para $\begin{cases} |h| + |k| > 0 \\ |h|\,, \quad |k| < \delta \end{cases}$

ou
$$S_{1,2} = \sum_{r=o,\, S=o}^{2a,2d} m_{r,s}\, h^r\, k^s > 0$$

$$S_{1,2} = \Sigma\, m_{r,s}\, h^r\, k^s + m_{2a,o}\, h^{2a} + m_{o,2d}\, k^{2d} > 0$$

Fazendo $\begin{cases} 0 < A_2 < m_{2a,o} \\ 0 < B_2 < m_{o,2d} \end{cases}$ (Veja-se teorema III)

será, escolhendo A_2 e B_2 convenientemente:

$$\sum_{r,\,s=1}^{2a,\,2d} m_{r,s}\, h^r\, k^s + m_{2a,o}\, h^{2a} + m_{o,2d}\, k^{2d} - A_2\, h^{2a} - B_2\, k^{2d} \geq 0$$

e
$$S_{1,2} > A_2\, h^{2a} + B_2\, k^{2d} \geq 0$$

e pelo teorema IV será finalmente $\mathbf{S_T > 0}$

2) *Se* $S_2 < 0$ para $h = p_o\, |k|^{\alpha_o}$ e $|k| < \delta$

será $S_{1,2} \lesseqgtr 0$ e $S_T \lesseqgtr 0$

3) *Se* $S_2 = 0$ para $h = p_o\, |k|^{\alpha_o}$ e $|k| < \delta$

então $S_{1,2} \geqslant 0$ e a soma S_T continua indefinida.

1.ª Nota

Pode testar-se a definição e positividade de $S_{1,2}$ *directamente*, aplicando os teoremas II e III à série cujo termo geral é $m_{r,s}\, h^r\, k^s$ e $\begin{cases} r < 2a \\ s < 2d \end{cases}$ e $r + s > 0$

2.ª Nota

No caso de $S_2 = 0$ haverá que repetir a operação até encontrar um par de termos $m_{2a_i,0}$ e $m_{0,2b_i}$ positivos, tais que, a série limitada $S_i \equiv (m_{r,s}\, h^r\, k^s)$ $r \leqslant 2a_i$ e $s \leqslant 2b_i$, tenha:

ou uma soma positiva para $\begin{cases} |h|, |k| < \delta \\ |h| + |k| > 0 \\ \text{e arbitrários.} \end{cases}$

e então a série total (S_T) é positiva-definida,

ou a soma é *positiva e negativa* conforme os valores de $|h|$ e $|k|$ escolhidos.

Se a soma for positiva semidefinida, é evidente que, por mais que se prolongue a operação, a indefinição não é levantada.

Método

Os lemas e os teoremas demonstrados permitem resolver o problema da *definição* da soma de uma série desde que os seus termos satisfaçam a determinadas condições nomeadamente,

$$\begin{cases} m_{r,s} < \mu < \infty \\ |h|, |k| < \delta < 1 \end{cases}$$

Ocorre imediatamente a utilização dos resultados à resolução dos problemas de extremos de funções susceptíveis de desenvolvimento em série de Taylor, em especial das funções contínuas.

Com efeito:

seja $u = u(x, y)$ $\begin{cases} x \text{ e } y & \text{variáveis reais} \\ u & \text{contínua e real} \end{cases}$

será:

$$u(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - u(x_0, y_0) = \Delta u + \frac{1}{2!}\Delta^2 u + \frac{1}{3!}\Delta^3 u + \ldots$$

sendo

$$\Delta^n u = \sum_{a,b}^{n} \frac{\partial^n u}{(\partial x)^a \,.\, (\partial y)^b} (dx)^a \,.\, (dy)^b$$

$$\text{com } n = a + b \quad e \quad a, b > 0$$

identificando

$$\delta x \equiv h \quad \text{e} \quad \delta y \equiv k.$$

será ainda:

$$u(x_0 + h, y_0 + k) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}.h + \frac{\partial u}{\partial y}.k\right) + \left(\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.h^2 + \frac{1}{2!}.2.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.h.k + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.k^2\right) + \ldots$$

$$= m_{1,0}\, h + m_{0,1}\, k + m_{2,0}\, h^2 + m_{1,1}\, h\, k + m_{0,2}\, k^2 + \ldots$$

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty} m_{r,s}\, h^r\, k^s \qquad \text{e} \quad \begin{cases} r + s \geqslant 1 \\ m_{r,s} < \mu < \infty \end{cases}$$

Ora esta série é exactamente a série que designámos por T ao tratar dos teoremas e lemas anteriormente demonstrados.

Então é legítimo proceder como adiante se indica:

	k^0	k^1	k^2	k^3	k^4	k^5
h^0		$m_{0,1}$	$m_{0,2}$	$m_{0,3}$	$m_{0,4}$	$m_{0,5}$
h^1	$m_{1,0}$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$	$m_{1,5}$
h^2	$m_{2,0}$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$	$m_{2,5}$
h^3	$m_{3,0}$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$	$m_{3,5}$
h^4	$m_{4,0}$	$m_{4,1}$	$m_{4,2}$	$m_{4,3}$	$m_{4,4}$	$m_{4,5}$
h^5	$m_{5,0}$	$m_{5,1}$	$m_{5,2}$	$m_{5,3}$	$m_{5,4}$	$m_{5,5}$
h^6	$m_{6,0}$	$m_{6,1}$	$m_{6,2}$	$m_{6,3}$	$m_{6,4}$	$m_{6,5}$

Fig. 1

1) Constrói-se o quadro, como indicado na fig. 1, onde se inscrevem os coeficientes ($m_{r,s}$) dos vários termos da série ($m_{r,s}\, h^r\, k^s$).
2) Identificam-se os termos *pares positivos* (ou negativos) da forma $m_{2a,o}$ e $m_{o,2b}$ de menor ordem.
3) Verificam-se as condições necessárias do teorema II, nomeadamente (veja-se Fig. 2):

   a) $m_{r,o} = 0$ para $r < 2a$
   b) $m_{s,o} = 0$ para $s < 2b$
   c) Se são nulos os termos ímpares ou pares negativos onde $M_o > \alpha > N_o$ e $M_o > 0$ e $N_o < M_o$.

4) No caso de $M_o = \alpha_o = N_o$, examinar as raízes da equação $\Sigma\, m_{r,s}\, p^r = 0$.

   a) Se forem todas complexas trata-se de um extremo (positivo ou negativo).
   b) Se forem duas ou mais reais não há extremo.
   c) Se forem uma real e as restantes complexas, há que proceder como se indica no teorema IV.

5) Na situação c), há que procurar outro par $m_{2ai,o}$ $m_{o,2bi}$ e respectiva série (S_i) e verificar se a soma é positiva ou não.
   Assim sucessivamente.

Note-se que no caso de *indefenição* (c) e em problemas de engenharia ou de física não tem interesse prático extremos cuja defenição só se verifica pela 6.ª ou 8.ª ordem e daí o método ser de interesse, pràticamente geral.

QUADRO DA APLICAÇÃO DA FÓRMULA $(r-i)\,\alpha < (j-s)$

$h, k \neq 0$

$h^r . k^s$ \ $h^{2i} k^{2j}$	h^2	h^2k^2	h^2k^4	h^2k^6	h^2k^8	h^4k^2	h^4k^4	h^4k^6	h^6k^2	h^6k^4	h^8k^2	k^2	h^4	k^4
h^1k^1	>1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	<1	$>\frac{1}{3}$	<3
h^1k^2	>2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	$>\frac{2}{3}$	<2
h^1k^3	>3	>1	+	+	+	$>\frac{1}{3}$	+	+	$>\frac{1}{5}$	+	$>\frac{1}{7}$	—	$>\frac{3}{3}$	<1
h^1k^4	>4	>2	+	+	+	$>\frac{2}{3}$	+	+	$>\frac{2}{5}$	+	$>\frac{2}{7}$	—	$>\frac{4}{3}$	—
h^1k^5	>5	>3	>1	+	+	$>\frac{3}{3}$	$>\frac{1}{3}$	+	$>\frac{3}{5}$	$>\frac{1}{5}$	$>\frac{3}{7}$	—	$>\frac{5}{3}$	—
h^1k^6	>6	>4	>2	+	+	$>\frac{4}{3}$	$>\frac{2}{3}$	$>\frac{1}{3}$	$>\frac{4}{5}$	$>\frac{2}{5}$	$>\frac{4}{7}$	—	$>\frac{6}{3}$	—
h^1k^7	>7	>5	>3	>1	+	$>\frac{5}{3}$	$>\frac{3}{3}$	$>\frac{2}{3}$	$>\frac{5}{5}$	$>\frac{3}{5}$	$>\frac{5}{7}$	—	$>\frac{7}{3}$	—
h^1k^8	>8	>6	>4	>2	+	$>\frac{6}{3}$	$>\frac{4}{3}$	$>\frac{3}{3}$	$>\frac{6}{5}$	$>\frac{4}{5}$	$>\frac{6}{7}$	—	$>\frac{8}{3}$	—
h^2k^1	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$<\frac{1}{2}$	$>\frac{1}{2}$	$<\frac{3}{2}$
h^2k^2	—	×	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	$>\frac{2}{2}$	$<\frac{2}{2}$
h^2k^3	—	—	+	+	+	$>\frac{1}{2}$	+	+	$>\frac{1}{4}$	+	$>\frac{1}{6}$	—	$>\frac{3}{2}$	$<\frac{1}{2}$
h^2k^4	—	—	×	+	+	$>\frac{2}{2}$	+	+	$>\frac{2}{4}$	+	$>\frac{2}{6}$	—	$>\frac{4}{2}$	—
h^2k^5	—	—	—	+	+	$>\frac{3}{2}$	$>\frac{1}{2}$	+	$>\frac{3}{4}$	$>\frac{1}{4}$	$>\frac{3}{6}$	—	$>\frac{5}{2}$	—
h^2k^6	—	—	—	×	+	$>\frac{4}{2}$	$>\frac{2}{2}$	+	$>\frac{4}{4}$	$>\frac{2}{4}$	$>\frac{4}{6}$	—	$>\frac{6}{2}$	—
h^2k^7	—	—	—	—	+	$>\frac{5}{2}$	$>\frac{3}{2}$	$>\frac{1}{2}$	$>\frac{5}{4}$	$>\frac{3}{4}$	$>\frac{5}{6}$	—	$>\frac{7}{2}$	—
h^2k^8	—	—	—	—	×	$>\frac{6}{2}$	$>\frac{4}{2}$	$>\frac{2}{2}$	$>\frac{6}{4}$	$>\frac{4}{4}$	$>\frac{6}{6}$	—	$>\frac{8}{2}$	—
h^3k^1														
h^3k^2														
h^3k^3														

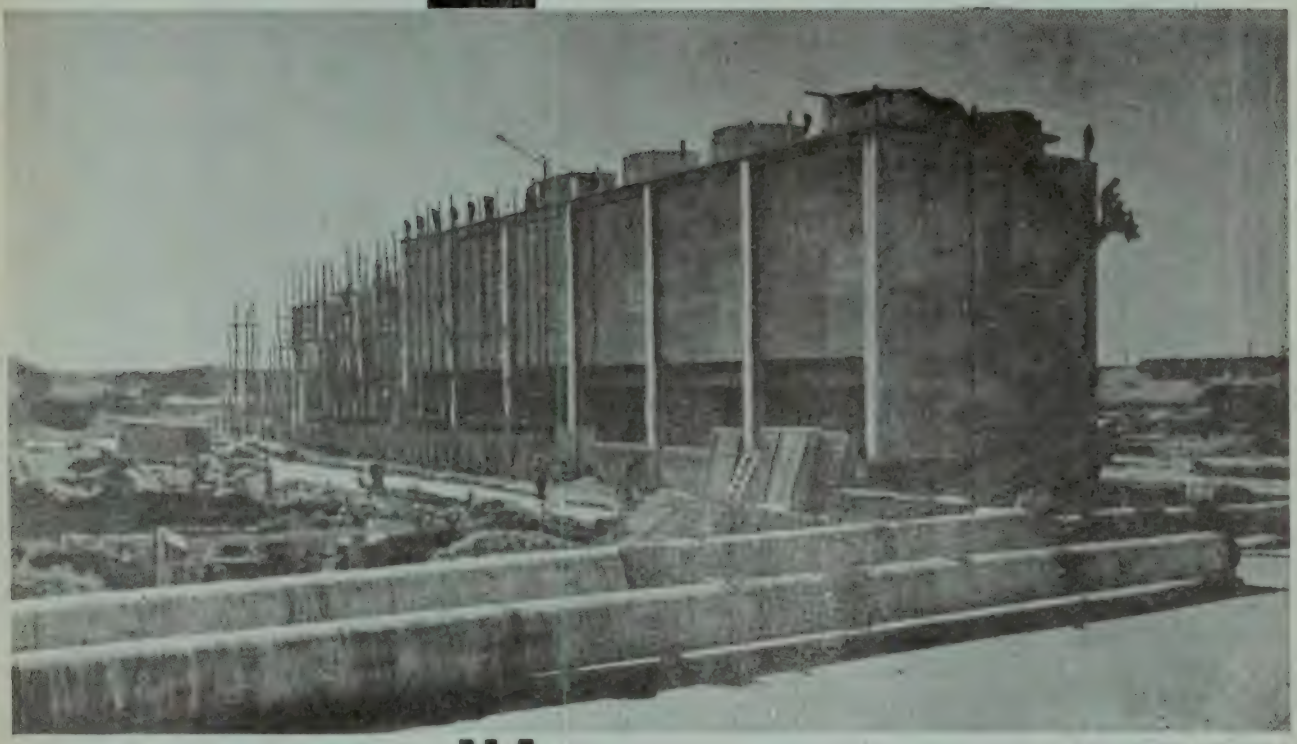
(+) significa $h^r k^s > h^{2i} k^{2j}$
(—) » $h^r k^s < h^{2i} k^{2j}$
h e k arbitrário e $|h|, |k| < \delta$

$> \alpha$ ou $< \alpha$ — significa que $h^r k^s > h^{2i} k^{2j}$
Se $|k| < \delta$ e $\alpha >$ ou $<$

Fig. 2

CENTRO DE PROJECTOS

COLOCA A SUA EXPERIÊNCIA AO SERVIÇO DA INDÚSTRIA NACIONAL



TORRE DE REFRIGERAÇÃO

NA ASSISTÊNCIA TÉCNICA

O CENTRO DE PROJECTOS CUF PODE PRESTAR ASSISTÊNCIA NAS DIVERSAS FASES DE UM PROJECTO, QUER COMO CONSULTOR NA AQUISIÇÃO DE MATERIAL, QUER FAZENDO A SUA POSTERIOR INSPECÇÃO E RECEPCÇÃO

O CONJUNTO DE TÉCNICOS DE QUE DISPÕE, O APOIO DA LONGA EXPERIÊNCIA INDUSTRIAL DA COMPANHIA UNIÃO FABRIL NOS VÁRIOS RAMOS DA INDÚSTRIA E AINDA A COLABORAÇÃO COM FIRMAS ESTRANGEIRAS GARANTEM A QUALIDADE DAS REALIZAÇÕES QUE LHE FOREM ENTREGUES

EXPONHA OS SEUS PROBLEMAS E DIRIJA AS SUAS CONSULTAS A **CENTRO DE PROJECTOS CUF** AV. 24 DE JULHO, 170 TELEF. 67 20 61 LISBOA - PORTUGAL TELEG PROFABRIL CP-5

ESTAMPARIAS TINTURARIAS LAVANDARIAS

PARA OS VOSSOS TECIDOS TECNICOS:
TRANSPORTADORES MANKONS, LAPPING, WOLFRIES.
FLANELAS, CANEVAS, ETC.,

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

Consultem:

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 93
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

FLUIDO E MASTIC

IMPERMEABILIZAÇÕES

TORNA TUDO ESTANQUE

Impermeabilização e vedação perfeita de:

Terraços, Empenas, Algerozes, Clarabóias, Paredes húmidas, Coberturas, Fendas, Juntas de dilatação, etc., etc.

Fácil aplicação — Elasticidade excepcional
Não endurece nem apodrece

ROOFATEX **À base de borracha + alumínio**

Reforça a acção impermeabilizante do «Rubio», dando às construções um aspecto agradável — Protege todos os materiais contra a humidade, a ferrugem e a corrosão

RUBIO E ROOFATEX dois produtos que se completam

Representante exclusivo: Orlando Fernandes

Rua Palmira, 46-A-B-C — LISBOA-1 — Telefs. 83 01 83 - 84 26 39 — End. teleg. «ORFER»

Aplicação do Método

Sejam dadas as duas funções de x e y

$$f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - 2y^5$$
$$\varphi(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 + y^6$$

Estudar as funções no ponto $(x = 0, y = 0)$ e testar se este ponto é um extremo.
Seguindo o método, procedamos a :

1.º — Construção dos quadros com a forma da Fig. 1 e para o efeito calculemos as derivadas parciais das funções:

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - 2y^5$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y^2 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 4y^3 - 10y^4 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{00} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -4y \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x + 12y^2 - 40y^3 \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} = -4 \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}\right)_{00} = -4$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 24y - 120y^2 \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 24 - 240y \qquad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{00} = 24$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial y^5} = -240 \qquad \left(\frac{\partial^5 f}{\partial y^5}\right)_{00} = -240$$

b) $\varphi(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 + y^6$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x - 2y^2 \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -4xy + 4y^3 + 6y^5 \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2 \qquad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{00} = 2$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = -4y \qquad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -4x + 12y^2 + 30y^4 \qquad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = -4 \qquad \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2}\right)_{00} = -4$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = 24y + 120y^3 \qquad \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 24 + 360y^2 \qquad \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_{00} = 24$$

$$\frac{\partial^5 \varphi}{\partial y^5} = 720y \qquad \left(\frac{\partial^5 \varphi}{\partial y^5}\right)_{00} = 0$$

$$\frac{\partial^6 \varphi}{\partial y^6} = 720 \qquad \left(\frac{\partial^6 \varphi}{\partial y^6}\right)_{00} = 720$$

Os desenvolvimentos em série respectivos são

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \Delta f + \frac{1}{2!}\Delta^2 f + \frac{1}{3!}\Delta^3 f + \ldots$$

sendo

$$\Delta^n f = \sum_{a,b} \frac{\partial^n f}{(\partial x)^a . (\partial y)^b} \times h^a . k^b$$

$$\text{com} \qquad a + b = n$$

$$\begin{cases} h \equiv dx \\ k \equiv dy \end{cases}$$

ou seja:

$$f(h,k) - f(0,0) = \Delta f_{00} + \frac{1}{2}\Delta^2 f_{00} + \frac{1}{3!}\Delta^3 f_{00} + \ldots$$

Idênticamente para φ.

Os quadros que se juntam com as designações A e B representam respectivamente as constantes $m_{r,s}$ da série $m_{r,s}\, h^r . k^s$.

Note-se que o termo $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\, \partial y^2}$ aparece 3 vezes $\Delta^3 f$ e daí a razão porque em vez de $\frac{-4}{3!}$ no quadro A se inscreveu $\frac{-12}{3!} = -2$.

QUADRO A

	k^0	k^1	k^2	k^3	k^4	k^5	k^6
h^0					1	-2	
h^1			-2				
h^2	1						
h^3							
h^4							

f (x, y)

QUADRO B

	k^0	k^1	k^2	k^3	k^4	k^5	k^6
h^0					1		1
h^1			-2				
h^2	1						
h^3							
h^4							

φ (x, y)

2) Identificação dos termos pares e positivos $m_{2a,o}$, $m_{o,2b}$.

$$\begin{cases} m_{2a,o} = 1 \\ m_{o,2b} = 1 \end{cases} \quad \text{tanto para f como para } \varphi .$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b = 4 \end{cases}$$

3) Verificar se as condições necessárias do teorema II se verificam:

1) $m_{r,o} = 0$ para $r < 2a$

$m_{1,o} = 0$

portanto é satisfeita

2) $m_{o,s} = 0$ para $s < 2b$

$m_{o,1} = m_{o,2} = m_{o,3} = 0$

portanto é satisfeita

3) Só são nulos os termos $(m_{r,s})$ ímpares ou pares negativos onde $M_o > \alpha > N_o$

e $M_o > 0$ e $M_o > N_o$ sendo $\begin{cases} r \leqslant 2a \\ s \leqslant 2b. \end{cases}$

Só há um termo nestas condições que é: $-2h^1 k^2$.
e os termos pares positivos da série S_1 são $1.h^2$ e $1.k^4$
e as condições são:

$$(r - 2i)\,\alpha < 2j - s$$

ou

$$\begin{cases} (1-2)\,\alpha < 0 - 2 & \text{ou} \quad \alpha > 2 \\ (1-0)\,\alpha < 4 - 2 & \text{ou} \quad \alpha < 2 \end{cases}$$

Não há portanto nenhum termo ímpar (ou par negativo) que satisfaça a desigualdade, tanto para f como para φ.

4) Verificando-se o caso em que $M_o = \alpha_o = N_o = 2$, há que estudar as raízes de equação $\Sigma\, m_{r,s}\, p^r = 0$ que neste caso tem a forma:

$$1\,.\,p^2 + (-2)\,p + 1 = 0$$

e $$p = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \quad \text{(uma raiz real e múltipla).}$$

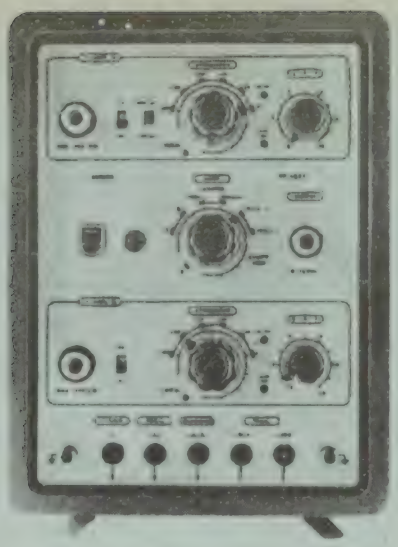
Logo é indefenida a série S_1 até $r \leqslant 2a$ e $s \leqslant 2b$ $\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b = 4 \end{cases}$

Tanto para f como para φ.

5) Estamos portanto na situação c) da alínea 4) do método, e então há que experimentar outros termos $m_{o,2bi}$ e ou $m_{2ai,o}$.
Agora, pode verificar-se a diferença entre f e φ.

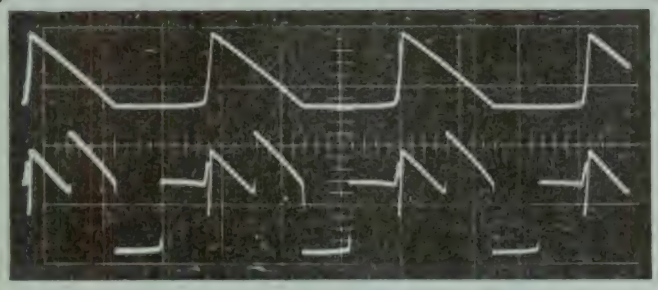
a) Para f não há mais termos pares positivos, há apenas um termo $-2k^5$ que é negativo para $k > 0$ (para $h = k^2$).
Portanto $S_{i,2} < 0$ para $h = k^2$.
Logo a função f tem um *extremo indefenido* ou como é uso dizer-se não tem um extremo em P (0,0).

b) Para φ a situação é diferente, há ainda o termo $1.k^6$ par e positivo da forma $m_{o,2bi}$
A série $S_2 = 1.k^6 > 0$
Donde $S_1 + S_2 > 0$ para $|h|, |k| < \delta$ mas arbitrários e finalmente $S_T \geqslant 0$ para $|h|$ e $|k| < \delta$ e arbitrários. A *função φ tem um extremo em P (0,0).*



observação simultânea

de dois ou mais fenómenos, com um osciloscópio de um só feixe, utilizando o **comutador electrónico Philips, tipo PP 1071**



oscilogramas feitos com um osciloscópio Philips, tipo GM 5603

utilizável com osciloscópios possuindo uma sensibilidade ajustável entre 20 mV/cm. e 100 mV/cm.

dois canais idênticos com uma largura de banda de 0-15 Mc/s.

sinais de saida absolutamente idênticos; máxima diferença de fase: 2 ns.

comutação automática com uma frequência de 100 c/s ou 100 kc/s ou controlada pela base de tempo do osciloscópio.

amplificação: 1 ×

supressão do traço de retorno durante a comutação.

utilizável com sondas simples com atenuação ou com adaptador por seguidor catódico.

alimentação:
110, 145, 200, 220 e 245 V, 40-100 c/s.

PHILIPS

instrumentos electrônicos de medição

Vendas e assistência técnica em todo o Mundo

Philips Portuguesa S.A.R.L., Rua Joaquim Antonio d'Aguiar 66, LISBOA

Philips, Dept°. EMA, EINDHOVEN, Holanda

vibração do betão

publivasc

vibradores externos e internos

réguas vibrantes equipamentos vibrantes
para superficies

energia electrica, pneumatica e gasolina

alta frequência e meia frequência

representante sociedade comercial romar ltda
rua da boavista, 83, 1.º d
lisboa

urbar
ingenieros

san sebastián
av generalisimo, 6
espanha

C. D. U. 621.313.322-81 : 621.316.717:
621.317.351

Arranque Síncrono de Turbo-Alternadores*

POR CARLOS FERRER MONCADA
Doutor-Engenheiro E. T. H. (Zürich)
Professor do Instituto Superior Técnico

B. APRESENTAÇÃO E APRECIAÇÃO DE OSCILOGRAMAS

I — INTRODUÇÃO

Os oscilogramas que a seguir apresentamos foram obtidos com um oscilógrafo de três laços de medida do Laboratório de Medidas Eléctricas do Instituto Superior Técnico.

Estes oscilogramas contribuem para esclarecer o comportamento de dois alternadores trifásicos e bipolares da Central Tejo, cada um com a potência nominal de 18.900 KVA e tensão nominal de 10.500 V, durante o arranque síncrono dum deles, funcionando como motor, quando ligado através do seu barramento de alta tensão ao outro, funcionando como gerador e lançado lentamente pela respectiva turbina.

No presente trabalho fazemos a apreciação de onze oscilogramas com base em conhecimentos relativos à «Estrutura Teórica» dos fenómenos que se pretendem estudar.

Antes do alternador iniciar o seu movimento são ligadas as correntes contínuas I_{Rg} e I_{Rm} de excitação dos rotores por fontes independentes.

Procedeu-se ao registo por métodos oscilográficos das correntes e tensões no estator e da velocidade angular de cada máquina.

O esquema prático de ligações está indicado na Fig. 1 onde se encontra intercalado um laço de medida para oscilografar a corrente i na fase U do estator e outro laço para oscilografar a tensão e entre a fase U_m do motor e o seu ponto neutro O_m.

A fotografia da Fig. 2, obtida na Central Tejo por iniciativa do Engenheiro-Chefe Mariz Simões, apresenta a instalação eléctrica relativa ao oscilógrafo.

Nos oscilogramas vão indicadas as escalas para tensão, corrente e tempo e estão inscritos os ângulos α_0 e γ_0, expressos em graus e respeitantes ao estado inicial de repouso, que caracterizam a posição relativa dos dois rotores, ângulo α_0, e a posição do rotor do gerador em relação à fase U_g do seu estator, ângulo γ_0.

Nos registos G e M dos oscilogramas encontram-se assinalados por traços os instantes correspondentes às voltas completas, a partir do arranque inicial, de cada uma das máquinas.

Todos os oscilogramas são apresentados em reprodução fotográfica dos originais. As reproduções fotográficas referentes aos oscilogramas com os números 1, 4, 5, 6 e 9 incluem, associados ao respectivo oscilograma e em correspondência com ele na mesma base de tempo, os gráficos das velocidades do motor e do gerador, n_m e n_g, e o gráfico do ângulo α entre os dois rotores em função do tempo, durante os primeiros segundos do arranque. A reprodução fotográfica referente ao oscilograma com o número 2 inclui o gráfico da velocidade do motor, n_m, associado ao oscilograma e em correspondência com ele na mesma base de tempo.

Assim, este conjunto, oscilograma e gráfico associado na mesma base de tempo, obtido por montagem fotográfica, permite estabelecer, a cor-

---

* O prefácio e a primeira parte deste trabalho, intitulada — *A*. Estrutura Teórica e sua Aplicação, foram publicados no número 327 (Abril de 1963) desta Revista.

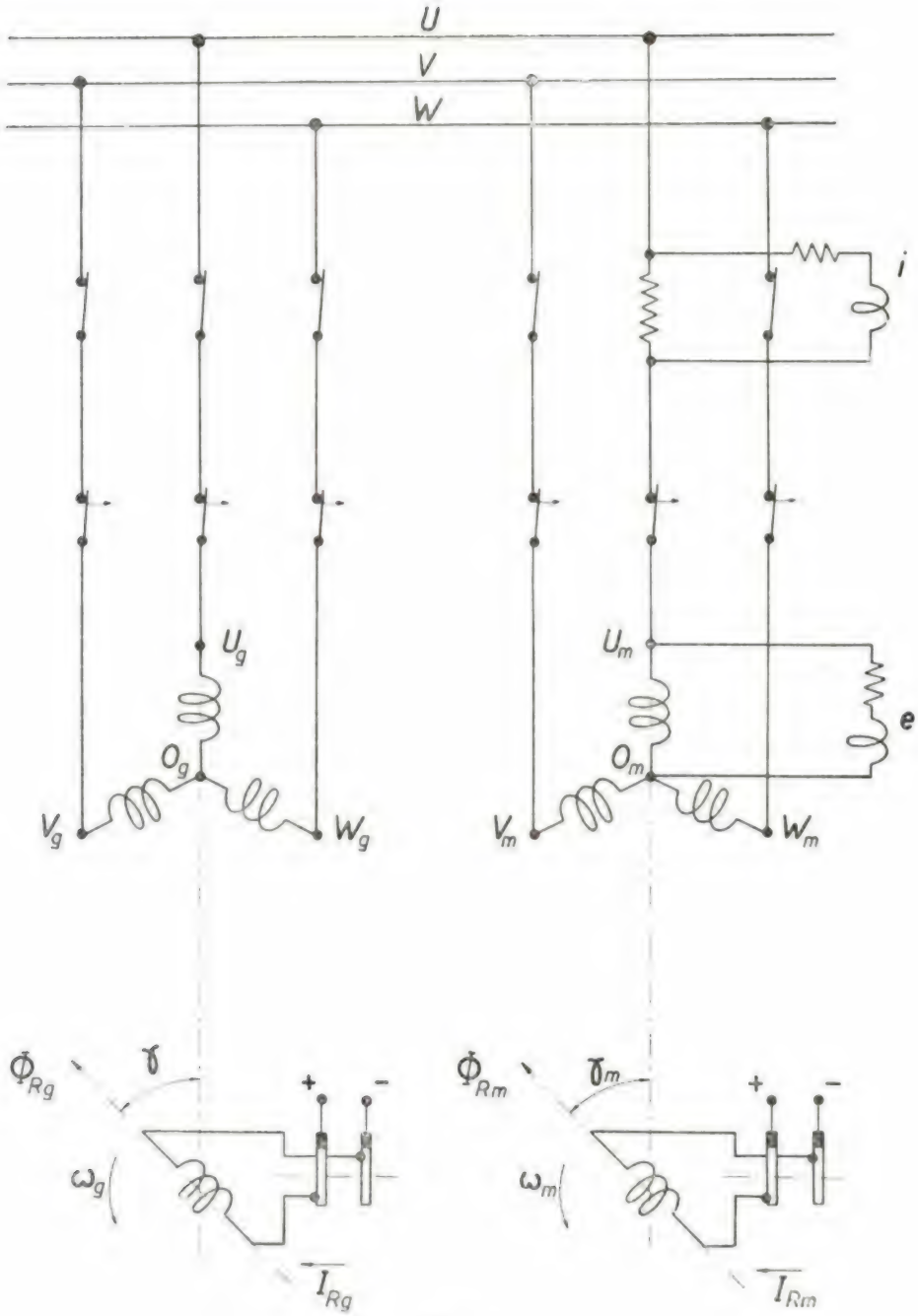


Fig. 1

respondência no tempo entre os fenómenos eléctricos oscilografados e as grandezas expressas nos gráficos que foram determinados a partir dos registos *M* e *G* do respectivo oscilograma.

Junto de cada oscilograma vão indicadas as respectivas excitações dos rotores.

Durante todos os ensaios, o rotor da máquina funcionando como motor conservou-se ligado ao rotor da respectiva turbina.

Os oscilogramas numerados de 1 a 8 inclusive, correspondem às seguintes excitações dos rotores:

$$I_{Rg} = 200 \text{ A} \qquad I_{Rm} = 100 \text{ A}.$$

Os restantes oscilogramas numerados de 9 a 11 correspondem às excitações:

$$I_{Rg} = 100 \text{ A} \qquad I_{Rm} = 50 \text{ A}.$$

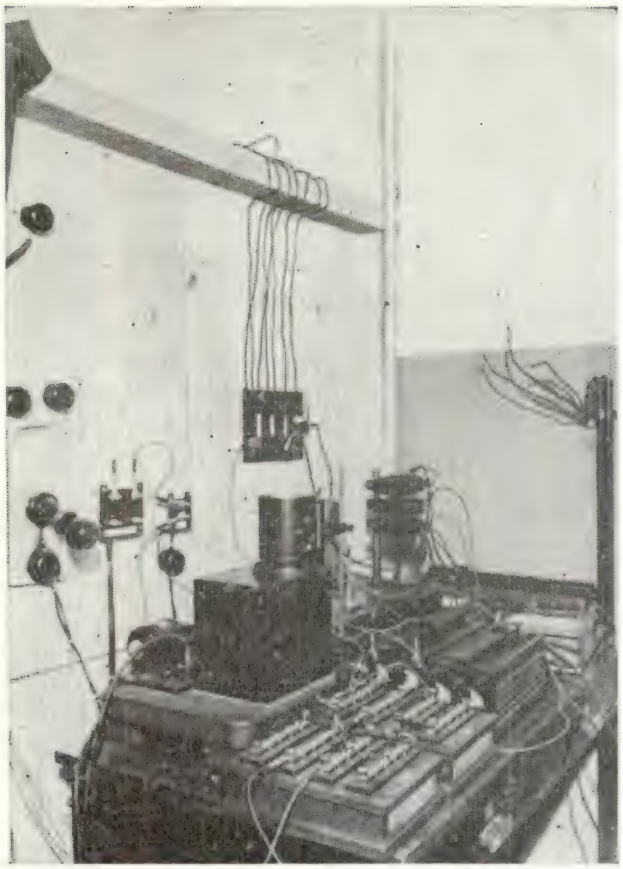


Fig. 2

Os dois primeiros oscilogramas 1 e 2 correspondem ao arranque síncrono a partir da posição de repouso $\alpha_0 = 20°$ e informam sobre o decorrer da corrente i e da tensão e e sobre as velocidades das máquinas.

Os oscilogramas 3 e 4 mostram como a forma da curva da corrente i na fase U depende do ângulo γ_0 que caracteriza, no estado inicial de repouso, a posição do rotor do gerador em relação à fase U_g do seu estator.

Os oscilogramas 5 e 6 mostram a influência da posição de repouso α_0 sobre o decorrer do arranque. No oscilograma 6 com $\alpha_0 = 62°$ é nítido o decorrer lento do arranque em relação aos casos anteriores.

O oscilograma 7 apresenta o sistema trifásico das três correntes durante todo o período de arranque. O oscilograma 8 mostra o sistema trifásico das tensões por fase do motor durante o arranque.

Os oscilogramas 9 e 10 obtidos com excitações iguais a metade das correspondentes aos oscilogramas anteriores, apresentam o decorrer da corrente i, tensão e, e velocidades das máquinas durante o arranque.

Finalmente o oscilograma 11 representa para as mesmas excitações do oscilograma 10, o sistema trifásico das correntes durante o arranque, pondo nitidamente em evidência, na sua parte final, as pulsações das amplitudes das correntes denunciando a falta de sincronismo das máquinas.

II — APRECIAÇÃO DOS OSCILOGRAMAS

1. — *Oscilograma 1*

Grandezas características do estado de repouso inicial

$$\alpha_0 = 20° \qquad \gamma_0 = 0_0$$

Correntes de excitação

$$I_{Rg} = 200\ A \qquad I_{Rm} = 100\ A$$

Estando as máquinas em repouso e ligadas segundo o esquema da Fig. 1 observou-se que o eixo magnético do rotor do motor estava em avanço de $\alpha_0 = 20°$ sobre o eixo magnético do rotor do gerador. Observou-se igualmente que o eixo magnético do rotor do gerador coincidia com o eixo magnético do fase U_g (fase marcada a vermelho) do estator do gerador, isto é, que o ângulo γ_0 entre estes dois eixos magnéticos era nulo ($\gamma_0 = 0$).

Esta posição $\gamma_0 = 0$ corresponde a um máximo do fluxo magnético ligado com a fase U_g do estator do gerador e originado pela corrente de excitação do seu rotor.

Feitas estas leituras de α_0 e γ_0 ligaram-se as correntes de excitação independente de cada um dos rotores ($I_{Rg} = 200$ A, $I_{Rm} = 100$ A) e comandou-se em seguida o arranque da turbina a vapor que aciona o gerador, entrando este lentamente em movimento.

Tomou-se para origem do tempo ($t = 0$) no oscilograma o instante em que o gerador iniciou o seu movimento de rotação.

O oscilograma regista os seguintes fenómenos:

1.° — Corrente i na fase U do estator durante os primeiros 7 segundos após o início da marcha do gerador;

2.° — Registo G — Marcação dos intervalos de tempo correspondentes a cada sector de

30° de rotação do gerador estando o primeiro sector dividido em três subsectores de 10° cada um;

3.° — Registo M — Marcação dos intervalos de tempo correspondentes a cada sector de 30° de rotação do motor estando o primeiro sector dividido em três subsectores de 10° cada um.

No registo G encontra-se assinalado o instante em que o gerador iniciou o seu movimento de rotação e que foi tomado para origem do tempo.

Através dos registos G e M do oscilograma, verifica-se que, enquanto o gerador roda os primeiros 10° durante 0,55 s, o rotor do motor se mantém ainda em repouso.

Terminado este intervalo de tempo de 0,55 s tem lugar o arranque suave do motor e as duas máquinas, gerador e motor, rodam e entram pràticamente em sincronismo ao fim da quarta volta do motor (ponto *d* do registo M do oscilograma) depois do gerador ter rodado durante cerca de 5,5 s e o motor durante cerca de 5 s.

O intervalo entre o início do movimento do gerador e o arranque do motor representa o tempo necessário para que as correntes no estator do motor, originadas pelas f. e. m. do gerador, atinjam valores tais que o campo girante por elas produzido consiga arrastar no seu movimento o rotor do motor vencendo assim o binário do atrito.

A partir do instante correspondente ao arranque do motor, a corrente i é condicionada, segundo a «Estrutura Teórica», pela diferença das forças electromotrizes ($e_g - e_m$). As frequências destas forças electromotrizes variam com o tempo e diferem em geral uma da outra enquanto não se estabelece o sincronismo perfeito. Na parte final do oscilograma, depois da quarta volta do motor (ponto d do registo M) verifica-se que as máquinas entraram pràticamente em sincronismo e que a amplitude da corrente i se mantém constante e independente da velocidade comum das máquinas como era de prever a partir da relação (23) da «Estrutura Teórica».

A partir dos registos G e M do oscilograma obtiveram-se os gráficos (capítulo III da «Estrutura Teórica») que representam os valores instantâneos das velocidades angulares dos rotores, n_g e n_m, expressas em rotações por minuto, e o ângulo de desfasagem α entre os mesmos rotores, em função do tempo. Estes gráficos estão incluídos na reprodução fotográfica do oscilograma 1.

Para apreciar a correspondência entre estes gráficos estabelecemos as seguintes notações:

α — valor instantâneo do ângulo de desfasagem entre o rotor do motor e o rotor do gerador;

α_0 — valor inicial de repouso do ângulo α;

α_g — valor instantâneo do ângulo de que o rotor do gerador rodou a partir da sua posição inicial de repouso;

α_m — valor instantâneo do ângulo de que o rotor do motor rodou a partir da sua posição inicial de repouso.

Tomamos α como positivo quando o eixo magnético do motor está em avanço em relação ao do gerador. Nestas circunstâncias obtemos para o ângulo α a expressão

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_g + \alpha_m$$

que condiciona para os valores instântaneos das velocidades angulares a relação

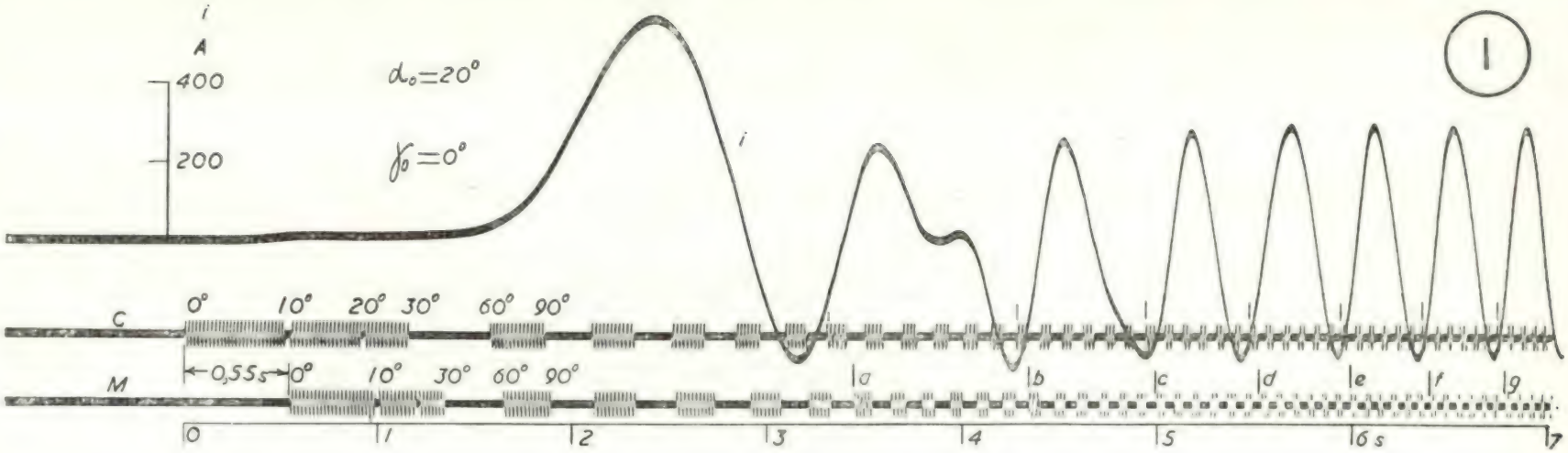
$$\frac{d\alpha_m}{dt} - \frac{d\alpha_g}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}.$$

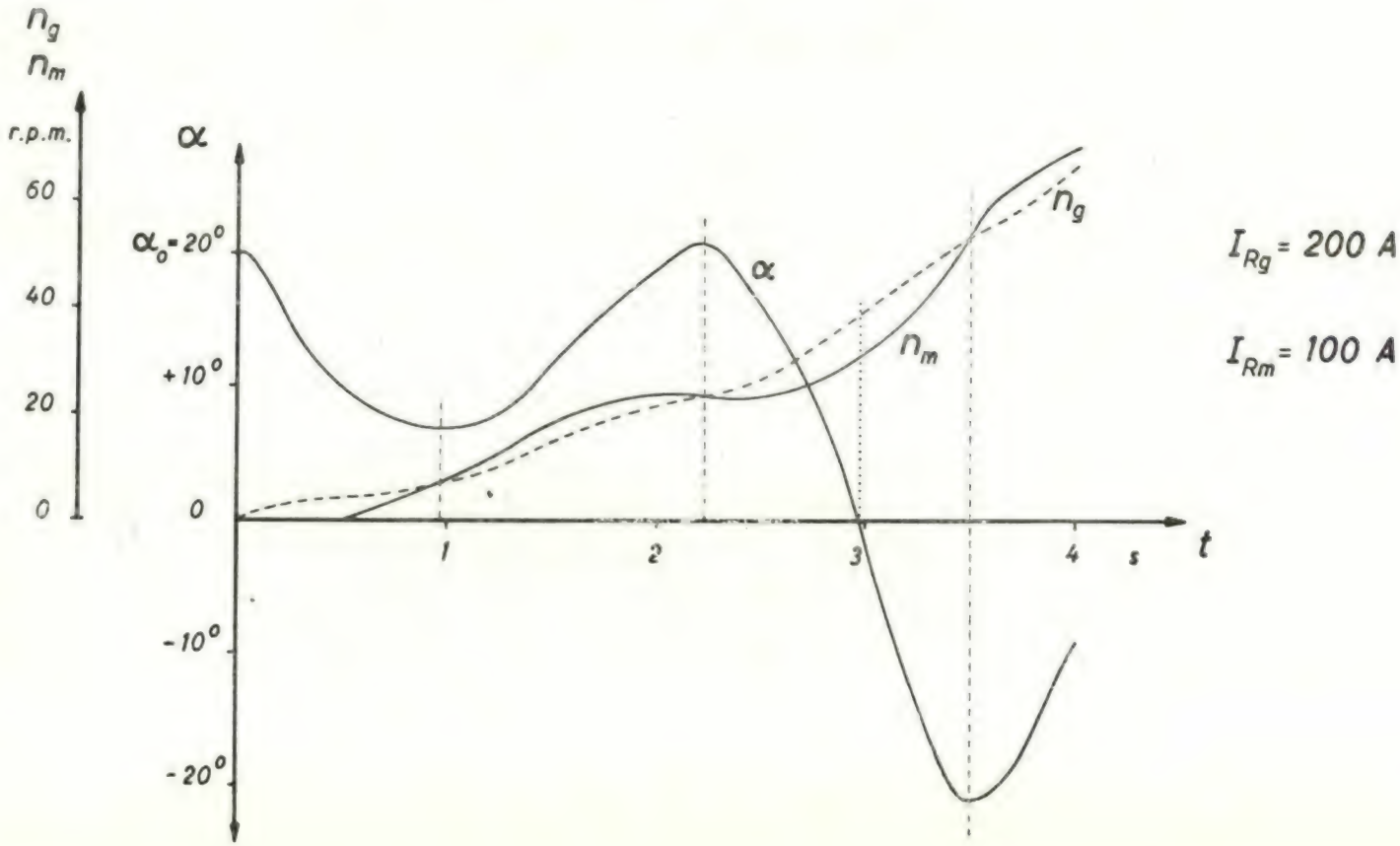
Daqui se conclui que a passagem pela igualdade das velocidades angulares do motor e do gerador ($n_g = n_m$) coincide no tempo com a ocorrência dum extremo de $\alpha = f(t)$. Nos instantes em que o ângulo α se anula, dá-se a ocorrência no tempo da concordância espacial dos dois eixos magnéticos dos rotores.

Assim, com base nestes gráficos, podemos acompanhar a evolução dos fenómenos no que diz respeito à velocidade de cada uma das máquinas e à posição relativa dos seus rotores durante o período do arranque.

Vemos assim que, a partir do instante em que o gerador iniciou o seu movimento e que se tomou para origem do tempo ($t = 0$), o seu rotor rodou durante 0,55 s até ao instante em que se deu o arranque do motor.

Como durante cerca de 0,5 seg. após o arranque do motor, a sua velocidade é ainda inferior à do gerador, o ângulo α entre os dois rotores que inicialmente tinha o valor $\alpha_0 = +20°$ dimi-


i
A
400
200
$\alpha_0 = 20°$
$\gamma_0 = 0°$
i
C
M
0° 10° 20° 30° 60° 90°
0,55s
0° 10° 30° 60° 90°
a b c d e f g
0 1 2 3 4 5 6 s 7


n_g
n_m
r.p.m.
60
40
20
0
α
$\alpha_0 = 20°$
+10°
0
-10°
-20°
α
n_g
n_m
1 2 3 4 s
t
$I_{Rg} = 200$ A
$I_{Rm} = 100$ A

nui a partir deste valor passando por um mínimo $\sigma_{min} = 7^o$ no instante em que a velocidade do motor e a velocidade do gerador passam pela primeira vez pelo mesmo valor $n_m = n_g = 6$ r.p.m. A partir deste instante entra-se numa região em que a velocidade do motor é superior à do gerador ($n_m > n_g$) e portanto o ângulo α aumenta até atingir um máximo no instante em que $n_m = n_g = 23$ r. p. m. A partir deste momento a velocidade do motor torna-se inferior à do gerador ($n_m < n_g$) e o ângulo α diminui ràpidamente passando pelor valor $\alpha = 0$ que corresponde à concordância dos dois rotores e entrando na região dos valores negativos de α que significam um atraso do rotor do motor em relação ao do gerador.

No instante da concordância dos dois rotores ($\alpha = 0$) verifica-se a partir dos gráficos a seguinte relação entre as frequências das forças electromotrizes:

$$\alpha = 0 \qquad \frac{n_m}{n_g} = 0{,}78 .$$

Após esta concordância o ângulo α torna-se negativo e passa por um mínimo quando $n_m = n_g = 53$ r. p. m.

No oscilograma da corrente i distinguem-se duas regiões: a região inicial de grandes intensidades de corrente de amplitude e frequência variável e a região final de amplitude constante e de menor valor, independente da frequência. Entre estas duas regiões dá-se uma inversão de fase da corrente i durante a segunda volta do motor (intervalo a-b do oscilograma).

A zona de grande intensidade de corrente que se encontra registada no oscilograma durante a primeira volta do motor e em que a corrente passa pelo seu maior valor $i_{max.} = 560$ A cerca de dois segundos após o arranque do motor, é condicionada pelo crescimento rápido da desfasagem interna φ_o com a frequência, durante a parte inicial do arranque (parte 4 — do Capítulo I V da «Estrutura Teórica»).

Este aumento rápido de φ_o condiciona em cada máquina um movimento de rotação do campo girante do estator em relação ao respectivo rotor provocando uma reacção dos seus circuitos que por sua vez acarreta uma zona de correntes com grande amplitude. Coincidindo no tempo com esta zona de correntes com grande amplitude nota-se no gráfico associado ao oscilograma uma região em que a velocidade angular n_m do motor deixa de aumentar e até decresce ligeiramente de maneira a evidenciar neste intervalo uma travagem da máquina devida ao facto do momento do binário ter transitòriamente mudado de sinal. Esta mudança de sinal é condicionada pelo facto de o campo girante do estator do motor se colocar transitòriamente em atraso em relação ao campo girante do seu rotor.

A seguir a esta zona de grandes correntes verifica-se que os dois rotores passam pela posição de concordância ($\alpha = 0$) com velocidades angulares que estão entre si na relação $\frac{n_m}{n_g} = 0{,}78$.

A variação temporal do valor instantâneo da diferença ($e_g - e_m$) das forças electromotrizes induzidas pelos fluxos dos dois rotores com frequências diferentes e crescentes, condiciona nestas circunstâncias e no que diz respeito à corrente i, a inversão de fase que se observa no oscilograma durante a segunda volta do motor entre os pontos a e b do registo M.

Após esta inversão de fase segue-se ràpidamente a região do oscilograma em que se estabeleceu o sincronismo das máquinas. Entre os instantes f e g do registo M dá o motor a sétima volta completa em 0,4 seg. o que corresponde à velocidade angular de $n = 150$ r. p. m. e, na máquina bipolar, à frequência de 2,5 períodos por segundo da corrente do estator.

Durante esta sétima volta do motor o oscilograma regista para amplitude da corrente o valor $i_{max.} = 300$ A.

Este valor obtido para a corrente a partir do oscilograma difere de cerca de 10 % do valor obtido por cálculo na «Estrutura Teórica» (Capítulo I V — n.º 3) pora o estado estacionário correspondente a $n_g = n_m = n = 150$ r. p. m. e em que foram introduzidas simplificações para estabelecer teoria.

2. — *Oscilograma 2*

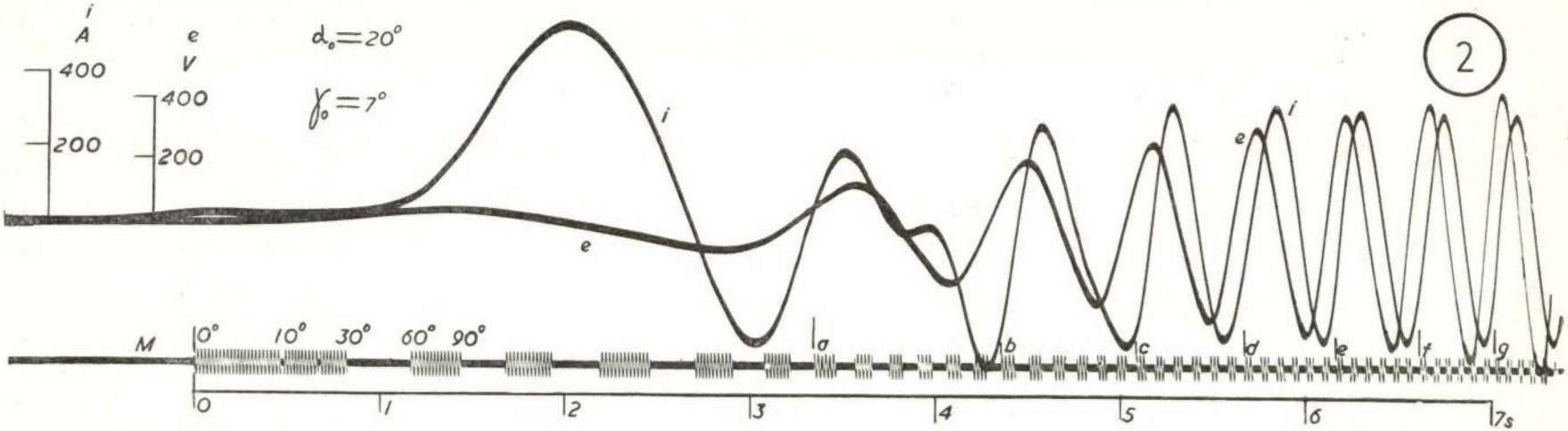
Grandezas características do estado de repouso inicial

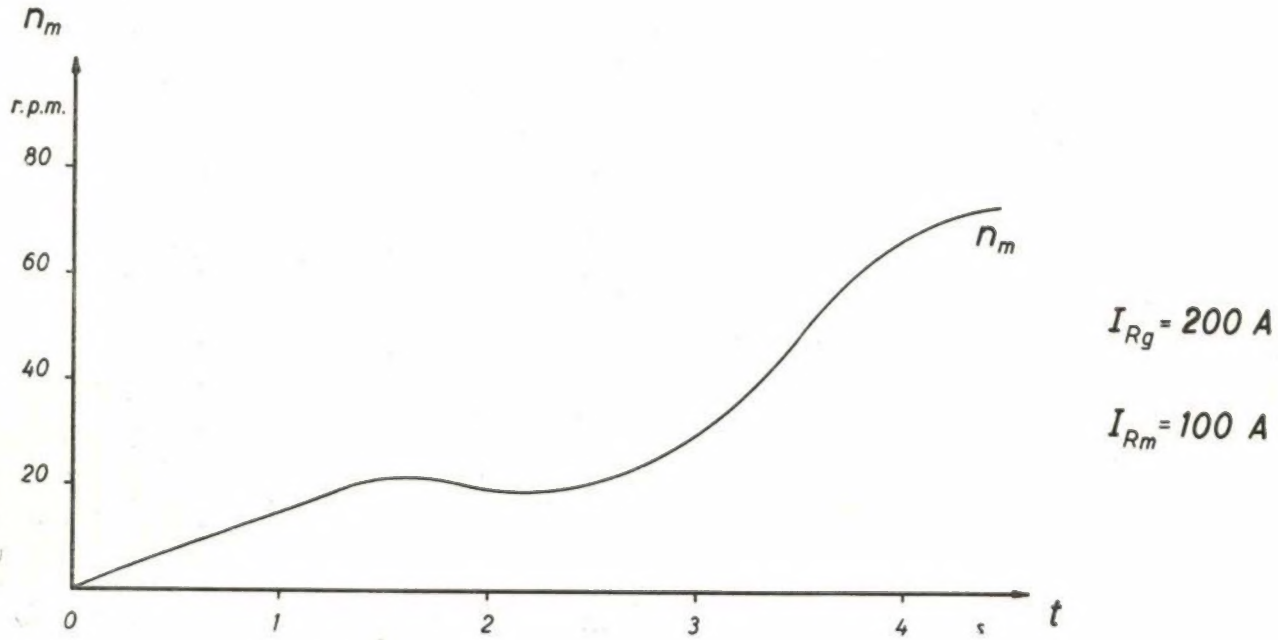
$$\sigma_o = 20^\circ \qquad \gamma_o = 7^\circ.$$

Correntes de excitação

$$I_{Rg} = 200 \text{ A} \qquad I_{Rm} = 100 \text{A}$$

As excitações dos rotores e a sua posição ini-


i
A
400
200
e
V
400
200
$\alpha_0 = 20°$
$\gamma_0 = 7°$
2
i
e
M
0°
10°
30°
60°
90°
a
b
c
d
e
f
g
0
1
2
3
4
5
6
7s


n_m
r.p.m.
80
60
40
20
0
1
2
3
4
s
t
n_m
$I_{Rg} = 200$ A
$I_{Rm} = 100$ A

cial relativa (α_0) coincidem com os respectivos valores indicados para o oscilograma 1. As condições de arranque são portanto as mesmas. Sòmente o ângulo $\gamma_0 = 7^\circ$ difere ligeiramente da posição de coincidência ($\gamma_0 = 0$) observada no oscilograma 1.

Tomou-se para origem do tempo ($t = 0$), neste oscilograma, o instante em que o motor iniciou o seu movimento. Este oscilograma 2 regista os seguintes fenómenos:

1.º — Corrente i na fase U do estator;
2.º — Tensão e nos terminais entre a fase U_m e o ponto neutro do motor;
3.º — Registo M — Marcação dos intervalos de tempo correspondentes a cada sector de 30° de rotação do motor estando o primeiro sector dividido em três subsectores de 10° cada um.

A corrente i neste oscilograma decorre de forma inteiramente análoga à já apresentada para a corrente no oscilograma 1. A amplitude da tensão e nos terminais da fase U_m do motor é crescente com a frequência.

A partir da quarta volta do motor (ponto d do registo M) verifica-se que as máquinas entraram pràticamente em sincronismo e que, enquanto a amplitude da corrente i se mantém constante e independente da frequência, a amplitude da tensão e cresce com a frequência.

A corrente por fase, i, encontra-se em atraso em relação à respectiva tensão por fase e, dum ângulo inferior a $\frac{\pi}{2}$ o que é condicionado pelo fluxo de energia da máquina funcionando como gerador para a máquina que está sendo acelerada como motor. No oscilograma encontram-se marcadas as escalas para a corrente e para a tensão.

Entre os instantes f e g do registo M dá o motor a sétima volta completa em 0,4 s o que corresponde, como no oscilograma 1, a $n = 150$ r.p.m. e na máquina bipolar a uma frequência de 2,5 períodos por segundo. Durante esta sétima volta o oscilograma regista os seguintes valores máximos: $i_{max} = 312$ A $e_{max} = 465$ V.

Estes valores obtidos a partir do oscilograma representam, dentro das aproximações feitas na teoria, uma boa confirmação dos resultados obtidos por cálculo na «Estrutura Teórica» (Capítulo IV — 3 —) para o regímen estacionário com $n = 150$ r. p. m.

Na zona de grande intensidade de corrente, durante a primeira volta do motor, o oscilograma apresenta o seu maior valor $i_{max} = 530$ A cerca de dois segundos após o arranque do motor.

A partir do registo M do oscilograma 2 obteve-se o gráfico que representa o valor instantâneo da velocidade angular do rotor do motor, n_m, expressa em rotações por minuto em função do tempo. Neste gráfico associado ao oscilograma 2 nota-se que logo após o arranque do motor o seu rotor acelera rodando cerca de 90° durante 1,5 s. Em seguida nota-se uma região em que a velocidade angular do motor decresce evidenciando assim neste intervalo, cerca de 1 s, uma travagem da máquina devida ao facto do momento do binário electrodinâmico ter transitòriamente mudado de sinal. Esta região em que a velocidade angular é decrescente coincide no tempo com a zona de correntes de grande amplitude evidenciada no oscilograma.

Passado este intervalo de tempo, cerca de 1 s, a velocidade angular do rotor passa a ser novamente crescente.

As considerações feitas sobre este fenómeno a respeito do oscilograma 1 aplicam-se inteiramente a este caso presente relativo ao oscilograma 2.

3. — *Oscilograma* 3

Grandezas do estado de repouso inicial

$$\alpha_0 = 28^\circ \qquad \gamma_0 = -93^\circ$$

Correntes de excitação

$$I_{Rg} = 200 \text{ A} \qquad I_{Rm} = 100 \text{ A}$$

As excitações dos rotores são iguais às indicadas para os oscilogramas 1 e 2. A posição inicial relativa dos rotores (ângulos $\alpha_0 = 28^\circ$) é sensìvelmente a mesma do que a observada no oscilograma 2 ($\alpha_0 = 20^\circ$). As condições de arranque são pràticamente as mesmas do que as do oscilograma 2. O ângulo γ_0 que caracteriza a desfasagem inicial do rotor do gerador em relação à sua fase U_g é porém diferente e tem o valor $\gamma_0 = -93^\circ$.

Tomou-se para origem do tempo ($t = 0$) no oscilograma 3 o instante em que o motor iniciou

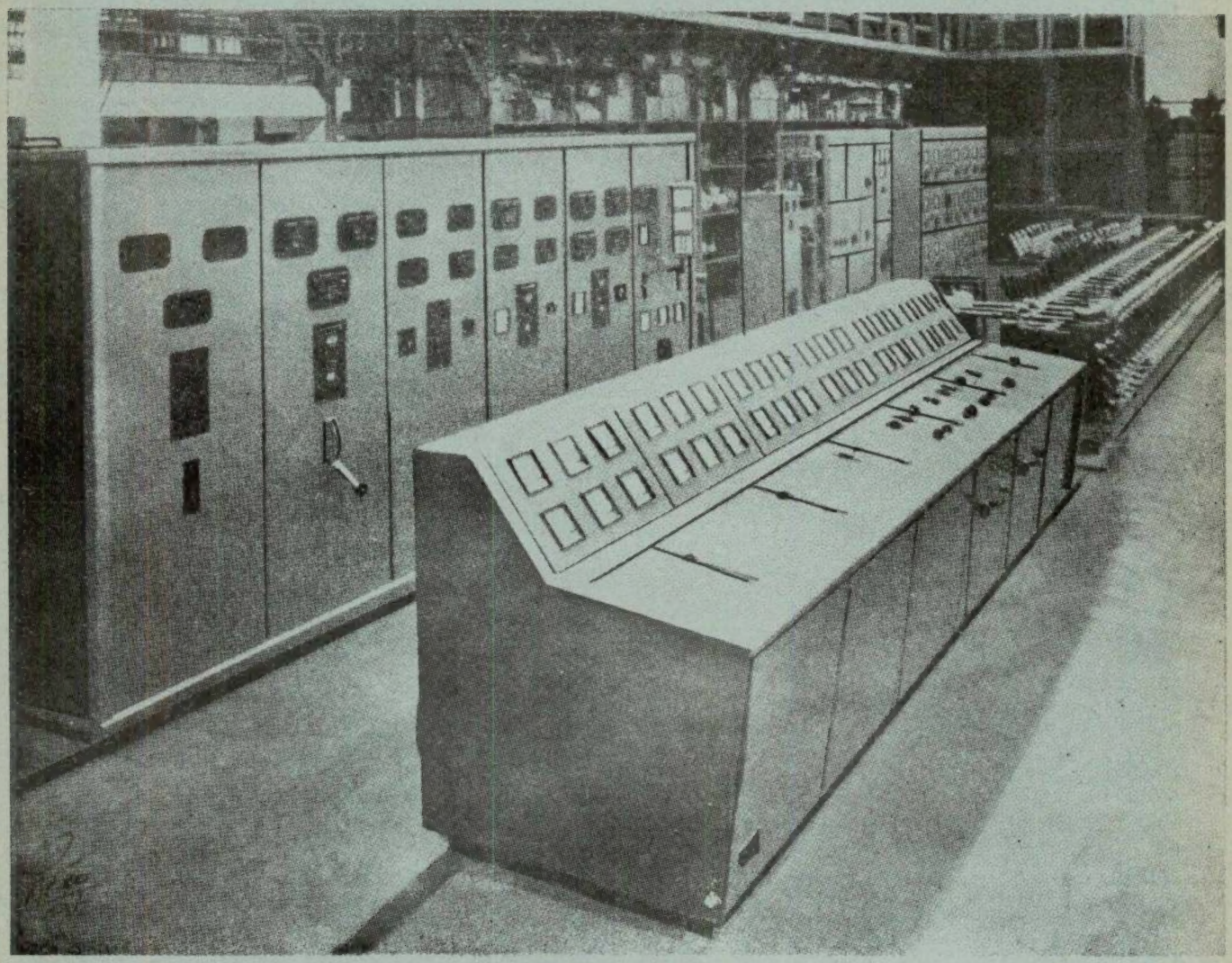
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743



Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

+GF+

O ensaio contínuo das areias de moldação e de machos intervêm numa larga margem no melhoramento da superfície das peças fundidas, na diminuição dos refugos e na utilização racional des areias.
O ensaio das areias constitue um primeiro passo essencial na fabricação de moldações de qualidade.
Em numerosos países a preferência dos fundidores vai para

Os aparelhos +GF+ de ensaio de areias,

que se distinguem por uma granda manejabilidade, uma precisão elevada de medida e apresentação estética.

Georges Fischer Sociedade Anónima, Schaffhouse (Suiça)

Telefone: (053) 5 60 31 / 5 70 31 Telegrammas: Geofischer

GM 1279/5

SOCIEDADE COMERCIAL ROMAR, LDA.—RUA DA BOA VISTA, 83, 1.º D.—LISBOA